



54. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde

29. April 2023

1. Es seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $0 < a, b, c, d < 1$ und $a + b + c + d = 2$. Man zeige, dass

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)} \leq \frac{ac+bd}{2}.$$

Gibt es unendlich viele Gleichheitsfälle?

(Josef Greilhuber)

2. Gegeben sei ein Dreieck ABC . Der Punkt P liege auf der Verlängerung von BC über B hinaus, sodass $BP = BA$. Der Punkt Q liege auf der Verlängerung von BC über C hinaus, sodass $CQ = CA$.

Man beweise, dass der Umkreismittelpunkt O des Dreiecks APQ auf der Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle BAC$ liegt.

(Karl Czakler)

3. Gegeben ist eine positive ganze Zahl n . Welcher Anteil der nichtleeren Teilmengen von $\{1, 2, \dots, 2n\}$ hat ein ungerades kleinstes Element?

(Birgit Vera Schmidt)

4. Man bestimme alle Paare positiver ganzer Zahlen (n, k) , für die

$$n! + n = n^k$$

gilt.

(Michael Reitmeir)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.