



50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene

4. April 2019

1. Es seien x und y reelle Zahlen mit $(x+1)(y+2) = 8$.

Man beweise:

$$(xy - 10)^2 \geq 64.$$

Man bestimme weiters alle Paare (x, y) reeller Zahlen, für die Gleichheit gilt.

(Karl Czakler)

2. Das konvexe Fünfeck $ABCDE$ besitzt einen Umkreis und es gilt $\overline{AB} = \overline{BD}$. Der Punkt P sei der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BE . Die Geraden BC und DE schneiden einander im Punkt Q .

Man beweise, dass die Gerade PQ parallel zur Diagonalen AD ist.

(Gottfried Perz)

3. Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl.

Auf eine Tafel wird ein $n \times n$ -Raster gezeichnet und jedes Feld mit einer der Zahlen -1 bzw. $+1$ beschriftet. Anschließend werden die n Zeilen- und auch die n Spaltensummen berechnet und die Summe S_n aller dieser $2n$ Summen bestimmt.

- (a) Man zeige: Für keine ungerade Zahl n gibt es eine Beschriftung mit $S_n = 0$.
(b) Man zeige: Ist n eine gerade Zahl, so gibt es mindestens sechs verschiedene Beschriftungen mit $S_n = 0$.

(Walther Janous)

4. Man bestimme alle natürlichen Zahlen n , die kleiner als 128^{97} sind und genau 2019 Teiler haben.

(Richard Henner)

Arbeitszeit: 4 Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.