Für welche natürlichen Zahlen k gilt $2^k \geq 5k - 3$?

Ungleichungen zwischen Folgen mit exponentiellem Wachstum und linearem oder polynomiellem Wachstum

Theresia Eisenkölbl

Mai 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Mit vollständiger Induktion

Wir beginnen mit der Titelfrage:

Beispiel 1. *Für welche natürlichen Zahlen k gilt $2^k \geq 5k - 3$?*

Wenn einem sonst gerade nichts einfällt, kann man immer kleine Werte betrachten:

k	2^k	$5k-3$
0	1	-3
1	2	2
2	4	7
3	8	12
4	16	17
5	32	22
6	64	27
7	128	32

Das sieht sehr danach aus, als ob die linke Seite zuerst größer ist, dann kleiner als die rechte ist und dann wieder größer ist. Sobald man vermutet, dass sie ab dann größer bleibt, kann man das mit Induktion beweisen.

- Induktionsanfang: Für $k = 5$ gilt $32 \geq 22$.
- Induktionsannahme: Für ein $k \geq 5$ gilt $2^k \geq 5k - 3$.
- Induktionsbehauptung: Für dieses k gilt auch $2^{k+1} \geq 5(k+1) - 3$.
- Induktionsbeweis: Üblicherweise fangen wir mit der komplizierteren Seite der Induktionsbehauptung an (da Vereinfachen leichter als Verkomplizieren ist), wenden dann die Induktionsannahme an, schreiben die Ungleichung hin, die wir gerne hätten und formen sie dann äquivalent um, bis sie trivial richtig ist. Damit erhalten wir

  $$\begin{aligned} 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2(5k-3) &\overset{?}{\geq} 5(k+1) - 3 \\ \Leftrightarrow 10k - 6 &\geq 5k + 2 \\ \Leftrightarrow 5k &\geq 8 \\ \Leftrightarrow k &\geq 1{,}6. \end{aligned}$$

  Die letzte Ungleichung in der Äquivalenzkette ist für $k \geq 5$ sicher immer richtig, also ist alles bewiesen.

Da wir die kleineren Werte schon oben angesehen haben, ist die Antwort also, dass die Ungleichung für alle natürlichen Zahlen außer $k = 2, 3, 4, 5$ gilt. $\square$

- Der Vorteil des Induktionsbeweises ist, dass er für Ungleichungen dieser Art immer funktioniert und bei etwas Übung wenig Nachdenken erfordert. Weiters funktioniert dieser Zugang (erraten und mit Induktion beweisen) für viel allgemeinere Situationen.
- Der Nachteil ist, dass man nicht das Gefühl bekommt, verstanden zu haben, warum solche Ungleichungen stimmen, und dass man doch einiges aufschreiben muss.

2 Induktionsbeweis: Zusatzinformation

Es ist nicht immer zwingend notwendig, zuerst die kleinen Fälle einzeln durchzugehen und zu erraten, für welche Werte die Ungleichung stimmt. Dazu betrachten wir zwei weitere Beispiele:

Beispiel 2. *Für welche natürlichen Zahlen k gilt $2^k \geq k - 3$?*

Da wir sowieso einen Induktionsbeweis machen wollen, machen wir zuerst den Induktionsschritt und überlegen uns später, wo der Induktionsanfang ist.

- Induktionsannahme: Für ein gewisses k gilt $2^k \geq k - 3$.
- Induktionsbehauptung: Für dasselbe k gilt dann auch $2^{k+1} \geq k - 2$.
- Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} 2^{k+1} \geq 2(k-3) = 2k - 6 &\overset{?}{\geq} k - 2 \\ &\Leftrightarrow k \geq 4 \end{aligned}$$

  Das ist ab $k = 4$ richtig.

Der Induktionsschritt funktioniert also ab $k = 4$. Wir überprüfen noch, dass die Ungleichung für $k = 4$ wirklich gilt, das ist dann der Induktionsanfang, den wir in der Reinschrift an den Beginn des Induktionsbeweis stellen. Wenn sich hier herausstellen würde, dass die Ungleichung für $k = 4$ nicht gilt, aber etwa für $k = 5$ aber schon, würde der Induktionsbeweis erst ab $k = 5$ funktionieren. Hier funktioniert es aber wirklich schon für $k = 4$, da $16 \geq 1$ gilt.

Über $k = 0, 1, 2, 3$ wissen wir noch gar nichts. Die müssen wir also doch einzeln überprüfen und erhalten, dass die Ungleichung für alle natürlichen Zahlen gilt. $\square$

Beispiel 3 (LWA 1991). *Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die*

$$3^n > n^2 - 2n + 91$$

gilt.

In dieser Aufgabe ist auf der rechten Seite keine lineare Funktion, sondern eine quadratische. Statt mit kleinen Fällen zu beginnen oder einen Induktionsbeweis zu beginnen (was beides ebenfalls funktioniert), können wir hier auch damit beginnen, auf ein vollständiges Quadrat zu ergänzen und erhalten als Konsequenz der Ungleichung, von der wir uns wünschen, dass sie gilt:

$$3^n > (n-1)^2 + 90 \geq 90.$$

Da $3^4 = 81$ ist, erhalten wir damit sofort, dass die Ungleichung nur stimmen kann, wenn $n > 4$ ist. Wir sind also optimistisch und starten den Induktionsbeweis für $n \geq 5$, weil das schließlich für lineare Funktionen auch funktioniert.

Bevor wir das machen, stellen wir aber noch fest, dass es sich um eine Ungleichung der Form $a > b$ für zwei ganze Zahlen handelt und die daher äquivalent zu $a \geq b+1$ ist. Das ist für diese Aufgabe nicht entscheidend, aber sehr oft ziemlich nützlich, da man mit scharfen Ungleichungen rechnet und beim Multiplizieren nichts an Schärfe verliert.

Wir wollen also $3^n \geq n^2 - 2n + 92$ für $n \geq 5$ mit Induktion zeigen.

- Induktionsanfang: Für $n = 5$ ist die Ungleichung $243 > 25 - 10 + 91$ sicher richtig.
- Induktionsannahme: Für ein n gilt $3^n \geq n^2 - 2n + 92$.
- Induktionsbehauptung: Für dasselbe n gilt auch $3^{n+1} \geq (n+1)^2 - 2(n+1) + 92$.
- Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \geq 3(n^2 - 2n + 92) &\overset{?}{\geq} (n+1)^2 - 2(n+1) + 92 \\ &\Leftrightarrow 3n^2 - 6n + 276 \geq n^2 + 91 \\ &\Leftrightarrow 2n^2 - 6n + 185 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4n^2 - 12n + 370 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (2n-3)^2 + 361 \geq 0 \end{aligned}$$

  Die letzte Ungleichung ist natürlich richtig, der Induktionsschritt funktioniert also immer.

Die Antwort ist also, dass die Ungleichung für alle $n \geq 5$ gültig ist. $\square$

Bemerkung 1. *Falls man im Induktionsschritt nicht auf die Idee kommt, auf ein vollständiges Quadrat zu ergänzen, kann man auch einfach* $2n^2 - 6n + 185 = 2n(n - 3) + 185$ *schreiben, auch das ist offensichtlich positiv für* $n \geq 5$. *Im Notfall kann man die benötigte Ungleichung auch noch einmal mit Induktion zeigen, das ist aber selten die effizienteste Art, eine polynomielle Ungleichung zu zeigen.*

Es ist auch möglich, einen Induktionsbeweis durch eine verbale Beschreibung zu ersetzen, wie wir uns im folgenden Beispiel ansehen.

Beispiel 4. *Für welche natürlichen Zahlen* k *gilt* $3^k \geq k + 1$*?*

Wir stellen fest, dass auf der rechten Seite immer 1 dazukommt, wenn k um 1 erhöht wird. Auf der linken Seite wird der Wert aber immer verdreifacht. Wenn der linke Wert also mindestens 1 ist, dann kommt durch das Verdreifachen auf jeden Fall mehr auf der linken Seite dazu als auf der rechten. Das ist bereits ab $k = 0$ der Fall. Da beide Seiten für $k = 0$ gleich sind und ab dann auf der linken Seite immer mehr dazukommt als auf der rechten, ist die Ungleichung für alle natürlichen Zahlen k gültig. $\square$

- Vorteil: Wenn die Ungleichung relativ einfach ist, entspricht die Beschreibung weit mehr der Erklärung, warum die Ungleichung stimmt. Außerdem sind Induktionsbeweise nicht spannend aufzuschreiben.

- Nachteil: Es ist sehr leicht, falsche oder unvollständige Argumente zu verwenden. Zum Beispiel wäre die Begründung

  „Für $k = 0$ ist die linke Seite gleich groß wie die rechte und bleibt dann größer oder gleich, weil exponentielle Ausdrücke schneller wachsen als lineare.“

  nicht richtig, weil exponentielle Ausdrücke erst für ausreichend große Werte verlässlich schneller wachsen. Insbesondere würde dieses Argument auch „beweisen“, dass die Titelungleichung für alle natürlichen Zahlen k gilt, was nicht stimmt. Bei komplizierteren Ausdrücken wird der Vorteil der Formelnotation dann schlagend, da sich der Induktionsbeweis kaum ändert, während die verbale Beschreibung kaum mehr verständlich ist. Das ändert aber nichts daran, dass korrekte verbale Beweise genauso rigoros sind wie Formelbeweise. Formelnotation macht das Argumentieren effizienter, nicht richtiger.

3 Mit Bernoulliungleichung

In diesem Abschnitt wollen wir die Bernoulliungleichung verwenden.

Satz (Bernoulliungleichung)**.** *Für alle $\alpha \geq -1$ und natürliche Zahlen n gilt*

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Die Ungleichung ist strikt, wenn $n \geq 2$ und $\alpha \neq 0$ gilt.

Beweis mit Induktion:

- Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt immer $1 \geq 1$.
- Induktionsannahme: Für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.
- Induktionsbehauptung: Für dasselbe n gilt dann auch $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha$.
- Induktionsbeweis:

  $$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^n \geq (1+\alpha)(1+n\alpha) = 1+(n+1)\alpha+n\alpha^2 \geq 1+(n+1)\alpha.$$

Im Induktionsschritt sehen wir darüberhinaus, dass wir eine strikte Ungleichung für $n+1$ erhalten, wenn $n\alpha^2 \neq 0$ ist. Für die drei Fälle $n = 0$, $n = 1$ und $\alpha = 0$ gilt aber auch offensichtlich Gleichheit in der Ungleichung. □

Beweis für $\alpha \geq 0$ mit dem Binomischen Lehrsatz:

$$(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \binom{n}{2}\alpha^2 + \cdots \geq 1 + n\alpha.$$

Das Argument gilt tatsächlich auch schon für $n = 0$, da bei kleinen n die überflüssigen Terme automatisch Null sind. Wieder erkennt man leicht, dass die Ungleichung für $n \geq 2$ und $\alpha > 0$ strikt ist. □

Bemerkung 2. *Der Binomische Lehrsatz hat einen Beweis für einen kleineren Wertebereich für α geliefert, dennoch ist es sinnvoll, den Beweis zu kennen. Erstens sind unsere Anwendungen sehr oft für positive α und zweitens werden wir unten noch sehen, dass es nützlich ist, mehrere Beweise zu kennen, wenn ein Satz nicht mehr funktioniert, aber eine leichte Modifikation des Beweises vielleicht doch.*

Beispiel 5. *Für welche natürlichen Zahlen k gilt $3^k \geq k + 2$?*

Nach der Bernoulliungleichung gilt $3^k = (1+2)^k \geq 1 + 2k$. Es bleibt also nur zu überprüfen, wann $1 + 2k \geq k + 2$ gilt, das ist aber für $k \geq 1$ wahr. Für $k = 0$ überprüfen wir separat, dass die Ungleichung nicht stimmt. Die Antwort ist also, dass die Ungleichung für alle natürlichen $k \neq 0$ gilt. $\square$

- Vorteil: Die Bernoulliungleichung liefert meistens den kürzesten Beweis, wenn sie direkt anwendbar ist, und ist daher oft aufschreibetechnisch vorzuziehen.
- Nachteil: Man muss sie schon kennen.

4 Bernoulliungleichung/Binomischer Lehrsatz: Zusatzinformation

Versuchen wir es jetzt für unsere Titelungleichung

Beispiel 6. *Für welche natürlichen Zahlen k gilt $2^k \geq 5k - 3$.*

Die Bernoulliungleichung liefert $2^k = (1+1)^k \geq 1 + k$. Wenn wir nun überprüfen, wann $1+k \geq 5k-3$ gilt, erhalten wir $4 \geq 4k$, also für $k = 0$ und $k = 1$. Das ist nicht sehr ergiebig. An dieser Stelle muss man aber nicht aufgeben, sondern hat mehrere Optionen. Man kann sich etwa daran erinnern, wie man die Bernoulliungleichung beweisen kann. Für die positiven α, die uns interessieren, folgt sie direkt aus den beiden ersten Termen des Binomischen Lehrsatzes.

Da die nicht gereicht haben, können wir also einfach einen Term dazunehmen:

$$
\begin{aligned}
2^k = (1+1)^k \geq 1 + k + \binom{k}{2} = 1 + k + k(k-1)/2 = k^2/2 + k/2 + 1 &\overset{?}{\geq} 5k - 3 \\
\Leftrightarrow k^2 + k + 2 &\geq 10k - 6 \\
\Leftrightarrow k^2 - 9k + 8 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow 4k^2 - 36k + 32 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow (2k-9)^2 &\geq 49
\end{aligned}
$$

Das ist sicher für $2k - 9 \geq 7$, also $k \geq 8$ richtig. Die kleineren Werte muss man wieder zu Fuß abhandeln. $\square$

Bemerkung 3. *Wenn einen das Ergänzen auf Quadrate nicht freut, kann man wieder sofort sehen, dass $k^2 - 9k + 8 = k(k-9) + 8$ für $k \geq 9$ positiv ist. Zur „Strafe“ muss man einen kleinen Fall mehr separat behandeln.*

Bemerkung 4. *Für sehr kleine k ergibt der Binomische Lehrsatz zwar nicht drei Terme, das ist aber kein Problem, da die überzähligen Terme dann auch immer Null sind. Das kann man also ohne Sorge für natürliche Zahlen verwenden.*

- Vorteil: Funktioniert immer. Man sieht, dass der Binomische Lehrsatz einen guten Grund liefert, warum das immer ab einem gewissen Wert funktioniert.
- Nachteil: Man muss den Binomischen Lehrsatz kennen.

Tatsächlich gibt es aber auch noch eine weitere Option, die Bernoulliungleichung anzuwenden. Dazu schreiben wir

$$2^k = (2^6)^{\frac{k}{6}} = 64^{\frac{k}{6}} \geq 64^{\left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor} \geq 1 + 63 \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor > 1 + 63 \left(\frac{k}{6} - 1 \right) > 10{,}5k - 62 \overset{?}{\geq} 5k - 3.$$

Das gilt ab $k \geq 11$ und die vielen kleineren Werte muss man wieder einzeln ansehen.

Angenehmer wird diese Rechnung, wenn man eine weitere Version der Bernoulliungleichung kennt:

Satz (Bernoulliungleichung für reelle Exponenten)**.** *Für alle $\alpha \geq 0$ und reelle Zahlen $r \geq 1$ gilt*

$$(1 + \alpha)^r \geq 1 + r\alpha.$$

Beweis. Wir betrachten beide Seiten als Funktionen in α und überprüfen, dass sie für $\alpha = 0$ gleich sind und dass für $\alpha \geq 0$ die Ableitung der linken Seite größer als die der rechten Seite ist.

Für $\alpha = 0$ gilt $1 = 1$ wie gewünscht.

Die gewünschte Ungleichung für die Ableitungen ist

$$r(1 + \alpha)^{r-1} \geq r \Leftrightarrow (1 + \alpha)^{r-1} \geq 1,$$

was für $\alpha \geq 0$ und $r \geq 1$ sicher richtig ist. □

Bemerkung 5. *Insbesondere erkennt man an diesem Beweis, dass die Bernoulliungleichung die Funktion $f(\alpha) = (1 + \alpha)^r$ gegen ihre Tangente bei $\alpha = 0$ abschätzt.*

Damit können wir die Anwendung der Bernoulliungleichung auf die Titelgleichung deutlich vereinfachen:

$$2^k = (2^5)^{k/5} = 32^{k/5} \geq (1+31)^{k/5} \geq 1 + 31k/5 \overset{?}{\geq} 5k - 3.$$

Die letzte Ungleichung gilt für alle natürlichen k, aber Achtung, hier muss der Exponent $k/5$ mindestens 1 sein, die Fälle $k < 5$ muss man also sehr wohl noch separat überprüfen.

Kehren wir jetzt noch einmal zurück zu Beispiel 3 und überlegen uns, wie das mit diesen weiteren Methoden funktioniert.

Beispiel 3 (LWA 1991)**.** *Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die*

$$3^n > n^2 - 2n + 91$$

gilt.

Beweis mit Binomischem Lehrsatz. Es gilt

$$3^n = (1+2)^n \geq 1 + 2n + 4\binom{n}{2} = 2n^2 + 1 \overset{?}{\geq} n^2 - 2n + 92.$$

Die letzte Ungleichung ist ab $n = 10$ wegen $n^2 \geq n^2 - 2n$ und $n^2 \geq 92$ sicher erfüllt. Die kleineren Fälle überprüft man wieder per Hand. □

Beweis mit Bernoulliungleichung mit rationalen Exponenten. Wenn wir das mit der Bernoulliungleichung beweisen wollen, können wir einen ähnlichen Trick anwenden:

$$3^n = ((1+2)^{n/2})^2 \geq (1 + 2n/2)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n^2 \overset{?}{-} 2n + 92\ .$$

Die letzte Ungleichung gilt für $4n \geq 91$, also ab $n = 23$. Das sind schon sehr viele kleine Fälle, die wir überprüfen müssten, also probieren wir es mit einem anderen Exponenten:

$$3^n = ((1+2)^{n/3})^3 \geq (1 + 2n/3)^3 \geq 8/27n^3 + 3 \cdot 4/9n^2 \geq n^2 + 8/27n^3 \overset{?}{\geq} n^2 - 2n + 92.$$

Für $n \geq 9$ gilt sicher $n^2 \geq n^2 - 2n$ und $8/27n^3 \geq 8 \cdot 27 \geq 92$. Die Fälle für $n \leq 8$ prüft man wieder per Hand nach. □

- Vorteil: Funktioniert ebenfalls immer.
- Nachteil: Kann rechnerisch lästig werden. Es ist nicht ganz offensichtlich, dass das immer funktioniert (was tatsächlich äquivalent zur Gültigkeit der Ungleichungen des Typs ist, den wir hier behandeln).

5 Für welche Ungleichungen funktionieren diese Methoden?

Beispiel 7. *Für welche k gilt: $\left(\frac{1}{2}\right)^k \geq k+1$?*

Es ist hier eine gute Idee, wenn man nicht solange sucht, bis man einen Wert findet, für den die Ungleichung stimmt, sondern rechtzeitig auf die Idee kommt, dass sie einfach falsch ist.

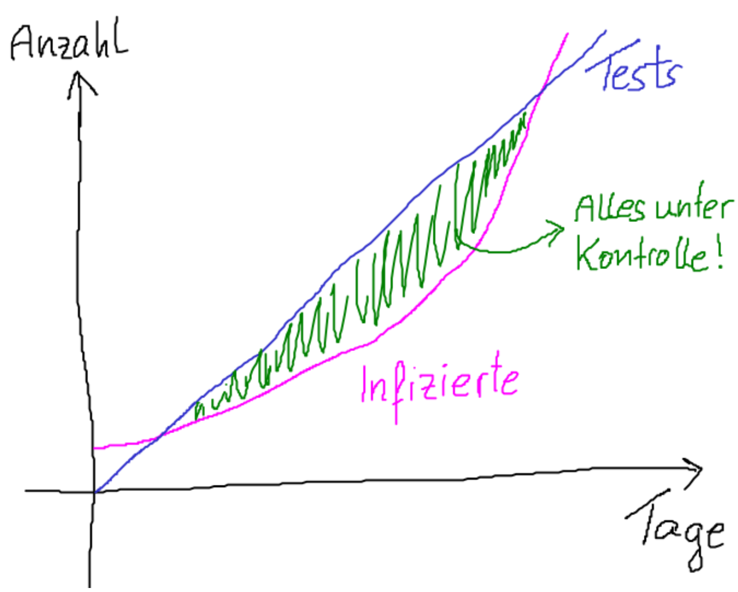
Danach könnte man dann die umgekehrte Ungleichung mit Induktion zeigen. Das geht sicher, aber viel schneller ist es, festzustellen, dass die linke Seite immer kleiner als 1 ist, womit alles geklärt ist.

Die Ungleichungen der Form
$$a^k \geq bk + c,$$
die für drei gegebene reelle Zahlen a, b und c ab einer gewissen natürlichen Zahl k stimmen, sind gerade diejenigen, wo die reelle Zahl a größer als 1 ist. Für diese Ungleichungen funktioniert sowohl vollständige Induktion als auch die Bernoulliungleichung immer. Das gilt ebenso für
$$a^k \geq p(k)$$
für $a > 1$ und p irgendein Polynom mit den vorgestellten erweiterten Methoden.

6 Schlussbemerkungen

Bemerkung 6. *Man kann solche Ungleichungen auch mit Ableiten nach dem Exponenten bearbeiten, das macht aber selten Spaß, weil man mit Logarithmen rechnen muss.*

Bemerkung 7. *Nicht vergessen, dass es passieren kann, dass die Ungleichung zuerst stimmt, dann nicht und dann wieder stimmt, siehe das Bild.*



Bemerkung 8. *Es ist oft kürzer, ein oder zwei kleine Fälle mehr per Hand zu überprüfen statt zu versuchen, eine möglichst scharfe Abschätzung im Beweis vorzunehmen.*

Bemerkung 9. *Es ist generell nützlich, nicht nur die Sätze, sondern auch ihre Beweise (und zwar im Idealfall mehrere) zu kennen, da man in Fällen, wo der Satz knapp nicht oder nur in unangenehmer Weise funktioniert, oft mit einem leicht modifizierten Beweis durchkommt.*

Bemerkung 10. *Zum Schluss wollen wir noch feststellen, dass sich alle Ungleichungen dieses Typs mit vollständiger Induktion zeigen lassen, alle mit der Bernoulliungleichung zeigen lassen und alle mit dem Binomischen Lehrsatz zeigen lassen. Der Rechenaufwand kann aber im Einzelfall deutlich verschieden sein.*

7 Übungsaufgaben

Beispiel 8. *Für welche k gilt $3^k \geq k+3$?*

Beispiel 9. *Für welche k gilt $3^k \geq 300k - 1000$?*

Beispiel 10. *Für welche k gilt $(\frac{1}{2})^k \geq k - 4$?*

Beispiel 11. *Für welche k gilt $2^k \geq k^2$?*

Beispiel 12. *Für welche k gilt $2^k \geq k^3$?*