1. Das Dreieck ABC hat den Umkreis u mit dem Mittelpunkt U. V ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks CUB, W ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks UVA. Beweise, dass W dann und nur dann auf der Geraden durch B und C liegt, wenn V auf dem Kreis u liegt!

2. Bestimme alle natürlichen Zahlen u und v, für welche die Folge $\langle a_n \rangle$ konvergiert:

$$a_0 = u, a_1 = v, a_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{{a_{n-1}}^2 + {a_n}^2} \right\rfloor \text{ für } n > 0$$

   Anmerkung: $\left\lfloor \sqrt{{a_{n-1}}^2 + {a_n}^2} \right\rfloor$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $\sqrt{{a_{n-1}}^2 + {a_n}^2}$

3. Die folgende Aufgabe handelt von Zahlen, die doppelt so groß wie Primzahlen sind. Wir nennen sie kurz DP-Zahlen. (DP-Zahlen sind also die Zahlen $4, 6, 10, 14, \ldots$)

   (a) Gesucht sind alle DP-Zahlen n, für die gilt: $\sigma(n)$ ist durch 6 teilbar.

   (b) Gesucht sind alle DP-Zahlen n, für die gilt: $\sqrt{n} < \varphi(n)$.

   (c) Gesucht sind alle DP-Zahlen n, für die gilt: $\tau(n+4) = \tau(n)$.

   Anmerkung:
   $\sigma(n)$ ist die Summe aller positiven Teiler von n,
   $\varphi(n)$ ist die Anzahl aller positiven Zahlen kleiner als n, die zu n teilerfremd sind,
   $\tau(n)$ ist die Anzahl aller positiven Teiler von n.

4. Wir nennen ein Dreieck wohlgeformt, wenn sich sein Umfang zu einer Seite so verhält, wie eine zweite Seite zur dritten Seite.

   (a) Beweise, dass $2c < b < 3c$ und $2a < 3b$ gilt, wenn a die längste und c die kürzeste Seite eines wohlgeformten Dreiecks ist!

   (b) Beweise, dass ein wohlgeformtes Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen nie den Umfang 2004 haben kann!

5. Gesucht sind alle reellen Zahlen x, y, z für die gilt:

$$\begin{aligned} |x| &= y + 1 \\ |y| &= z + 2 \\ |z| &= x + 3 \end{aligned}$$

Für den Qualifikationswettbewerb werden die besten drei Ergebnisse der Aufgaben 1-5 gewertet.