BRG SCHLOSS WAGRAIN **BRG SCHLOSS WAGRAIN**

Schlossstraße 31 A-4840 Vöcklabruck

31. ÖSTERREICHISCHE MATHEMATIK-OLYMPIADE QUALIFIKATIONSWETTBEWERB - OBERÖSTERREICH

1. Löse folgende Ungleichungen ($a \in \mathbb{R}$):

$$9 + 4a^2 + 9a^4 > 6a(1 + a^2)$$

2. Bestimme die Summen folgender Reihen:

(a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \frac{7}{128} + \ldots =$

(b) $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{2}{11 \cdot 13} + \frac{2}{13 \cdot 15} + \ldots =$

(c) $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \frac{1}{121} + \frac{1}{169} + \ldots =$

und

(d) $\frac{1}{9} - \frac{1}{36} + \frac{1}{81} - \frac{1}{144} + \frac{1}{225} - \frac{1}{324} + \frac{1}{441} - \frac{1}{576} + - \ldots =$

Verwende:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} + \frac{1}{121} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

3. Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6xy &= 751 \\ x^2 + y^2 + 10xy &= -653 \end{aligned}$$

4. XYZ sei ein rechtwinkeliges Dreieck mit dem rechten Winkel in Z.
Der Punkt F im Innern des Dreiecks habe die Eigenschaft, dass die Flächen der drei Dreiecke XYF, XZF und YZF gleich groß sind.

Zeige, dass dann $\overline{XF}^2 + \overline{YF}^2 = 5 \cdot \overline{ZF}^2$.

Quelle der Beispiele: Angabezettel eines Teilnehmers / einer Teilnehmerin