30. Österreichische Mathematik-Olympiade

Qualifikationswettbewerb für Oberösterreich

im Festsaal des BRG Vöcklabruck Schloß Wagrain
am 16. April 1999

1. Bestimme alle natürlichen Zahlen $x \leq y \leq z \in \mathbb{N}$, für die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$$

2. Überprüfe bei den folgenden zwei Reihen, ob sie konvergent sind, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert!

   (a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-4}{2n^3 - 6n^2 + 4n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n}{3n^2 - 4}$

3. In einem Viereck $ABCD$, in dem die beiden Diagonalen normal aufeinander stehen, werden die Seiten halbiert. Von diesen Halbierungspunkten E, F, G und H werden zu den gegenüberliegenden Seiten die Lote gefällt. Zeige, dass die vier Lotfußpunkte und die vier Halbierungspunkte auf einem Kreis liegen.

4. Für welche Winkel $x \in [0°, 360°]$ bzw. $[0, 2\pi]$ gilt folgende Ungleichung:

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geq \frac{8}{3}$$

Quelle der Beispiele: Angabezettel eines Teilnehmers / einer Teilnehmerin