29. Österreichische Mathematik-Olympiade

Qualifikationswettbewerb für Oberösterreich

Ort: Bundesrealgymnasium Vöcklabruck Schloß Wagrain
Zeit: 23. April 1998

1. n sei eine natürliche Zahl größer als 4. Die Zahl z sei:

   $$z = n^4 - 10n^2 + 9$$

   Beweise folgende Behauptung:
   Falls n ungerade ist, dann ist z durch 384 teilbar.

2. p sei eine Primzahl ungleich 2 und ungleich 5.

   Die Menge $M_p = \{1, 11, 111, \ldots, 111\ldots1\}$ enthält genau p Zahlen. (Die letzte Zahl hat p Mal die Ziffer 1)
   z.B. $M_3 = \{1, 11, 111\}$
   oder $M_7 = \{1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111\}$

   Zeige: Es gibt mindestens eine Zahl $x \in M_p$, sodass x durch p teilbar ist.

3. Beweise folgende Eigenschaft des gleichschenkeligen Trapezes:

   $$(e + b) \cdot (e - b) = a \cdot c$$

   Es sind dabei a und c die beiden parallelen Seiten und e die Diagonalenlänge.

4. Löse folgendes Gleichungssystem:

   $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x + y + z &= 1 \\ xy &= z^2 \end{aligned}$$

Quelle der Beispiele: Angabezettel eines Teilnehmers / einer Teilnehmerin