29. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Polen 2006

Einzelwettbewerb 1. Tag 30. Juni 2006

1. Sei $M(n) = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ eine Menge von 6 aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen. Wir betrachten alle Ausdrücke der Form

$$\frac{a}{b} + \frac{d}{d} + \frac{e}{f}$$

wobei die Menge $\{a, b, c, d, e, f\} = M(n)$.

Sei nun

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = \frac{xvw + yuw + zuv}{uvw}$$

der größte Wert dieser Ausdrücke.

   (a) Man zeige: Für ungerade n gilt $\mathrm{ggT}(xvw + yuw + zuv, uvw) = 1$ genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(x, u) = \mathrm{ggT}(y, v) = \mathrm{ggT}(z, w) = 1$.

   (b) Für welche positiven ganzen Zahlen n gilt $\mathrm{ggT}(xvw + yuw + zuv, uvw) = 1$?

2. Man bestimme alle Polynome $P(x)$ mit reellen Koeffizienten, sodass für alle reellen Zahlen x gilt:

$$(x+1)^3 P(x-1) - (x-1)^3 P(x+1) = 4(x^2 - 1)P(x)$$

3. Im Tetraeder $ABCD$ seien:
K der Inkreismittelpunkt des Dreiecks CBD.
M der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABD.
L ist der Schwerpunkt des Dreiecks DAC.
N ist der Schwerpunkt des Dreiecks BAC.

Nehmen wir an, dass die vier Geraden AK, BL, CM und DN durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Muss dann $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder sein?

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.
Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.

Quelle der Beispiele: Angabezettel eines Teilnehmers / einer Teilnehmerin

29. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Polen 2006

Einzelwettbewerb 2. Tag 1. Juli 2006

4. Wir sagen, eine positive ganze Zahl d ist eine Sonnenzahl, wenn für alle positiven ganzen Zahlen x, y gilt:
   d ist ein Teiler von $(x+y)^5 - x^5 - y^5$ genau dann, wenn d ein Teiler von $(x+y)^7 - x^7 - y^7$ ist.
   (a) Ist 29 eine Sonnenzahl?
   (b) Ist 2006 eine Sonnenzahl?
   (c) Man zeige, dass es unendlich viele Sonnenzahlen gibt.

5. Man zeige: Für jede positive ganze Zahl n und alle positiven reellen Zahlen a, b, c gilt die folgende Ungleichung:
$$\frac{a^{n+1}}{a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n} + \frac{b^{n+1}}{b^n + b^{n-1}c + \ldots + c^n} + \frac{c^{n+1}}{c^n + c^{n-1}a + \ldots + a^n} \geq \frac{a+b+c}{n+1}$$

6. Für einen inneren Punkt D des Dreiecks ABC bezeichnet:
   D_c den Schnittpunkt der Geraden CD und AB,
   D_b den Schnittpunkt der Geraden BD und AC,
   D_a den Schnittpunkt der Geraden AD und BC.
   Man zeige: Es existiert ein spitzwinkeliges Dreieck KLM mit Höhenschnittpunkt H und den Höhenfußpunkten H_k auf LM, H_l auf KM und H_m auf KL, sodass die folgenden Gleichheiten von Flächen gelten:
$$\begin{aligned}
F(A, D_c, D) &= F(K, H_m, H) \\
F(B, D_c, D) &= F(L, H_m, H) \\
F(B, D_a, D) &= F(L, H_k, H) \\
F(C, D_a, D) &= F(M, H_k, H) \\
F(C, D_b, D) &= F(M, H_l, H) \\
F(A, D_b, D) &= F(K, H_l, H)
\end{aligned}$$

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.
Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.

29. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Polen 2006

Mannschaftswettbewerb 3. Juli 2006

7. Man finde alle nicht negativen ganzen Zahlen m und n, sodass

$$\sum_{k=1}^{2^m} \left[\frac{kn}{2^m}\right] \in \{28, 29, 30\}$$

(Bemerkung: Für eine reelle Zahl z ist die ganze Zahl $[z]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als z ist.)

8. Sei $A \subset \{x | 0 \leq x < 1\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

   (a) A enthält mindestens 4 Elemente.

   (b) Für je vier paarweise verschiedene Elemente $a, b, c, d \in A$ gilt $ab + cd \in A$.

   Man zeige: A enthält unendlich viele Elemente.

9. Gegeben sei ein 8×8 Schachbrett mit 64 Feldern. Weiters haben wir Steine der Größe 3×1, die genau 3 Felder bedecken. So einen Stein kann man parallel zu den Seiten des Schachbretts bewegen. Natürlich nur, wenn die passierten Felder frei sind. Wenn keine Steine bewegt werden können, nennen wir eine solche Platzierung stabil.

   (a) Man bestimme die kleinste Anzahl von bedeckten Feldern in einer stabilen Platzierung.

   (b) Man zeige: Es gibt stabile Platzierungen mit nur einem unbelegten Feld.

   (c) Man bestimme alle Felder, die in mindestens einer Platzierung von (b) unbelegt sind.

10. Sei $ABCDES$ eine (nicht notwendigerweise gerade) Pyramide mit einer rechteckigen Basis $ABCD$ und Seitenflächen ABS, BCS, CDS und DAS, die spitzwinkelige Dreiecke sind. Wir betrachten alle Quader, die der Pyramide eingeschrieben sind, deren Basis in der Ebene $ABCD$ liegt. Und die oberen Eckpunkte des Quaders liegen in den Seitenflächen (je einer in jeder Seitenfläche).

    Man bestimme die Menge der Mittelpunkte der Quader.

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.
Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.

Quelle der Beispiele: Angabezettel eines Teilnehmers / einer Teilnehmerin