

## 28. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Ötz 2005

Einzelwettbewerb 1. Tag 30. Juni 2005

1. Für ein konvexes  $n$ -Eck  $P_n$  sagen wir, dass ein konvexes Viereck  $Q$  Diagonalenviereck von  $P_n$  heißt, wenn seine Ecken Eckpunkte von  $P_n$  und seine Seiten Diagonalen von  $P_n$  sind.  
Sei  $d_n$  die Anzahl der Diagonalenvierecke von einem konvexen  $n$ -Eck  $P_n$ .  
Man bestimme  $d_n$  für alle  $n \geq 8$ .

2. Man bestimme alle Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für alle reellen Zahlen  $x$

$$P(P(P(P(P(x)))))) = x^{28} \cdot P(P(x))$$

gilt.

3. Seien  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  reelle Zahlen, die die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

(a)  $0 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

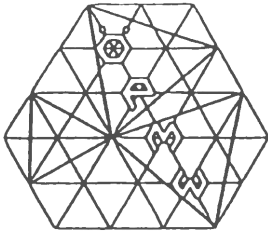
(b) Für alle  $0 \leq i < j \leq n$  gilt:  $a_j - a_i \leq j - i$

Man zeige:

$$\left( \sum_{i=0}^n a_i \right)^2 \geq \sum_{i=0}^n a_i^3$$

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.



# 28. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Ötz 2005

Einzelwettbewerb 2. Tag 1. Juli 2005

4. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl  $a \geq 2$  mit der Eigenschaft:  
Es existiert ein Primzahl  $p$  und eine natürliche Zahl  $b \geq 2$ , sodass

$$\frac{a^p - a}{p} = b^2$$

5. Gegeben ist ein konvexes Viereck  $ABCD$  mit  $AB = CD$ .  
Außerhalb des Vierecks zeichnen wir die Dreiecke  $ABE$  und  $CDF$ , sodass

$$\angle ABE = \angle DCF \quad \text{und} \quad \angle BAE = \angle FDC$$

Man zeige, dass die Mittelpunkte der Strecken  $AD$ ,  $BC$  und  $EF$  kollinear sind.

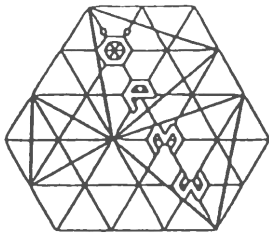
6. Man bestimme alle monotonen Funktionen  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , sodass für alle  $x, y \in \mathbb{Z}$

$$f(x^{2005} + y^{2005}) = (f(x))^{2005} + (f(y))^{2005}$$

(Bemerkung:  $\mathbb{Z}$  ist die Menge der ganzen Zahlen)

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.



## 28. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Ötz 2005

Mannschaftswettbewerb 2. Juli 2005

7. Für jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  löse man das folgende Gleichungssystem in ganzen Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned} (n^2 - n) x_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n \cdot \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) &= n^3 - n^2 \\ (n^2 - n) x_2 + x_3 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_1 \cdot \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) &= n^3 - n^2 \\ &\vdots \\ (n^2 - n) x_i + x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) &= n^3 - n^2 \\ &\vdots \\ (n^2 - n) x_n + x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) &= n^3 - n^2 \end{aligned}$$

8. Definieren wir die Menge  $R_{mn} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq n, x \text{ und } y \text{ ganze Zahlen}\}$ . Betrachten wir Funktionen  $f : R_{mn} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes Quadrupel von Punkten  $A_i(x_i, y_i) \in R_{mn}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), die Ecken eines Quadrats mit Seitenlänge  $0 < s < 3$  sind, ist die Summe

$$f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3) + f(x_4, y_4) = 0$$

Für jedes Paar  $(m, n)$  positiver ganzer Zahlen bestimme man  $F(m, n)$ , die Anzahl solcher Funktionen auf  $R_{mn}$ .

9. Wir betrachten die Gleichung  $x^3 + y^3 + z^3 = 2$ .
- (a) Man zeige: Sie hat unendlich viele ganzzahlige Lösungen  $x, y, z$ .
  - (b) Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen  $x, y, z$  mit  $|x|, |y|, |z| \leq 28$ .
10. Man finde alle Paare  $(k, n)$  nichtnegativer ganzer Zahlen mit der folgenden Eigenschaft: Für alle positiven reellen Zahlen  $x$  und  $y$  gilt die Ungleichung

$$1 + \frac{y^n}{x^k} \geq \frac{(1+y)^n}{(1+x)^k}$$

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.