28. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Ötz 2005

Einzelwettbewerb 1. Tag 30. Juni 2005

1. Für ein konvexes n-Eck P_n sagen wir, dass ein konvexes Viereck Q Diagonalenviereck von P_n heißt, wenn seine Ecken Eckpunkte von P_n und seine Seiten Diagonalen von P_n sind.
   Sei d_n die Anzahl der Diagonalenvierecke von einem konvexen n-Eck P_n.
   Man bestimme d_n für alle $n \geq 8$.

2. Man bestimme alle Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für alle reellen Zahlen x

$$P(P(P(P(P(x))))) = x^{28} \cdot P(P(x))$$

   gilt.

3. Seien $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ reelle Zahlen, die die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

   (a) $0 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$

   (b) Für alle $0 \leq i < j \leq n$ gilt: $a_j - a_i \leq j - i$

   Man zeige:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)^2 \geq \sum_{i=0}^{n} {a_i}^3$$

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.
Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.

28. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Ötz 2005

Einzelwettbewerb 2. Tag 1. Juli 2005

4. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl $a \geq 2$ mit der Eigenschaft:
   Es existiert ein Primzahl p und eine natürliche Zahl $b \geq 2$, sodass
   $$\frac{a^p - a}{p} = b^2$$

5. Gegeben ist ein konvexes Viereck $ABCD$ mit $AB = CD$.
   Außerhalb des Vierecks zeichnen wir die Dreiecke ABE und CDF, sodass
   $$\measuredangle ABE = \measuredangle DCF \qquad \text{und} \qquad \measuredangle BAE = \measuredangle FDC$$
   Man zeige, dass die Mittelpunkte der Strecken AD, BC und EF kollinear sind.

6. Man bestimme alle monotonen Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{Z}$
   $$f\left(x^{2005} + y^{2005}\right) = (f(x))^{2005} + (f(y))^{2005}$$
   (Bemerkung: $\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen)

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.
Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.

Quelle der Beispiele: Angabezettel eines Teilnehmers / einer Teilnehmerin

28. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Ötz 2005

Mannschaftswettbewerb 2. Juli 2005

7. Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ löse man das folgende Gleichungssystem in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned}
\left(n^2 - n\right) x_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} {x_j}^2\right) &= n^3 - n^2 \\
\left(n^2 - n\right) x_2 + x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_1 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} {x_j}^2\right) &= n^3 - n^2 \\
&\vdots \\
\left(n^2 - n\right) x_i + x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \left(\sum_{j=1}^{n} {x_j}^2\right) &= n^3 - n^2 \\
&\vdots \\
\left(n^2 - n\right) x_n + x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} {x_j}^2\right) &= n^3 - n^2
\end{aligned}$$

8. Definieren wir die Menge $R_{mn} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq n, x \text{ und } y \text{ ganze Zahlen}\}$.
Betrachten wir Funktionen $f : R_{mn} \to \{-1, 0, 1\}$ mit der folgenden Eignenschaft:
Für jedes Quadrupel von Punkten $A_i(x_i, y_i) \in R_{mn} (i = 1, 2, 3, 4)$, die Ecken eines Quadrats mit Seitenlänge $0 < s < 3$ sind, ist die Summe

$$f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3) + f(x_4, y_4) = 0$$

Für jedes Paar (m, n) positiver ganzer Zahlen bestimme man $F(m, n)$, die Anzahl solcher Funktionen auf R_{mn}.

9. Wir betrachten die Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = 2$.
   (a) Man zeige: Sie hat unendlich viele ganzzahlige Lösungen x, y, z.
   (b) Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen x, y, z mit $|x|, |y|, |z| \leq 28$.

10. Man finde alle Paare (k, n) nichtnegativer ganzer Zahlen mit der folgenden Eigenschaft:
Für alle positiven reellen Zahlen x und y gilt die Ungleichung

$$1 + \frac{y^n}{x^k} \geq \frac{(1+y)^n}{(1+x)^k}$$

Quelle der Beispiele: Angabezettel eines Teilnehmers / einer Teilnehmerin

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.
Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.