



## 27. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Cetniewo 2004

Einzelwettbewerb 1. Tag 24. Juni 2004

1. Für jede positive ganze Zahl  $n$  sei  $S(n)$  die Ziffernsumme von  $n$  (in Dezimalschreibweise).

Sei  $N = \sum_{k=10^{2003}}^{10^{2004}-1} S(k)$ . Man bestimme  $S(N)$ .

2. In einem Dreieck  $ABC$  sei  $D$  der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen von  $\gamma$  (Winkel bei  $C$ ) mit der Seite  $AB$ .

Weiters sei  $F$  der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$ .

Man zeige, daß stets folgende Ungleichung gilt:

$$2 \cdot F \cdot \left( \frac{1}{AD} - \frac{1}{BD} \right) \leq AB$$

3. Man löse das folgende Gleichungssystem über den reellen Zahlen:

$$a - \sqrt{1 - b^2} + \sqrt{1 - c^2} = d$$

$$b - \sqrt{1 - c^2} + \sqrt{1 - d^2} = a$$

$$c - \sqrt{1 - d^2} + \sqrt{1 - a^2} = b$$

$$d - \sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 - b^2} = c$$

(Alle Quadratwurzeln sind nichtnegativ.)

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.



## 27. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Cetniewo 2004

Einzelwettbewerb 2. Tag 25. Juni 2004

- Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen  $n$ , für die  $n^{10} + n^5 + 1$  eine Primzahl ist.
- Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen  $n$ , für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 27 \\x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^{24}\end{aligned}$$

über den positiven reellen Zahlen lösbar ist.

- Für  $n = 2^m$  ( $m$  ist eine positive ganze Zahl) betrachte man die Menge  $M(n) = \{1, 2, \dots, n\}$  natürlicher Zahlen.  
Man zeige: Es gibt eine Anordnung  $a_1, a_2, \dots, a_n$  der Elemente von  $M(n)$ , sodaß für alle  $1 \leq i < j < k \leq n$  gilt:  $a_j - a_i \neq a_k - a_j$ .

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.



## 27. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Cetniewo 2004

Mannschaftswettbewerb 26. Juni 2004

7. Man bestimme alle Funktionen  $f$ , definiert auf der Menge der positiven ganzen Zahlen mit ganzzahligen Funktionswerten, die die folgende Bedingung erfüllen:  
Für alle Paare  $(x, y)$  teilerfremder, positiver ganzer Zahlen gilt

$$f(x + y) = f(x + 1) + f(y + 1)$$

8. (A) Man zeige: Für  $n = 4$  oder  $n \geq 6$  kann jedes Dreieck  $ABC$  in  $n$  zum Dreieck  $ABC$  ähnliche (nicht notwendigerweise kongruente) Dreiecke zerlegt werden.  
(B) Man zeige: Ein gleichseitiges Dreieck kann weder in 3 noch in 5 gleichseitige Dreiecke zerlegt werden.  
(C) Gibt es ein Dreieck  $ABC$ , das sowohl in 3 als auch in 5 Dreiecke (analog zu Aufgabe A) zerlegt werden kann? (Man gebe entweder ein Dreieck und solche Zerlegungen an oder beweise, daß kein solches Dreieck existiert.)

9. Gegeben sind die zweiseitigen Folgen

$$\langle \dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots \rangle, \langle \dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots \rangle, \langle \dots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots \rangle$$

positiver reeller Zahlen. Für jede ganze Zahl  $n$  gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} a_n &\geq \frac{1}{2}(b_{n+1} + c_{n-1}) \\ b_n &\geq \frac{1}{2}(c_{n+1} + a_{n-1}) \\ c_n &\geq \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n-1}) \end{aligned}$$

Man bestimme  $a_{2005}, b_{2005}, c_{2005}$ , falls  $a_0 = 26, b_0 = 6, c_0 = 2004$ .

10. Für jedes Polynom  $Q(x)$  bezeichnet  $M(Q)$  die Menge jener nichtnegativer ganzer Zahlen  $x$ , für die  $0 < Q(x) < 2004$ .

Wir betrachten Polynome  $P_n(x)$  der Form  $P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + 1$ , mit Koeffizienten  $a_i = \pm 1$ , für  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Für jedes  $n = 3^k$  ( $k > 0$ ) bestimme man:

- (A)  $m_n$  - das Maximum der Anzahl der Elemente in  $M(P_n)$  über alle solche Polynome  $P_n(x)$ ;  
(B) alle Polynome  $P_n(x)$ , für die  $|M(P_n)| = m_n$ .

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.