27. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Cetniewo 2004

Einzelwettbewerb 1. Tag 24. Juni 2004

1. Für jede positive ganze Zahl n sei $S(n)$ die Ziffernsumme von n (in Dezimalschreibweise).
   Sei $N = \sum_{k=10^{2003}}^{10^{2004}-1} S(k)$. Man bestimme $S(N)$.

2. In einem Dreieck ABC sei D der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen von γ (Winkel bei C) mit der Seite AB.
   Weiters sei F der Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
   Man zeige, daß stets folgende Ungleichung gilt:
$$2 \cdot F \cdot \left(\frac{1}{AD} - \frac{1}{BD} \right) \leq AB$$

3. Man löse das folgende Gleichungssystem über den reellen Zahlen:
$$\begin{aligned} a - \sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-c^2} &= d \\ b - \sqrt{1-c^2} + \sqrt{1-d^2} &= a \\ c - \sqrt{1-d^2} + \sqrt{1-a^2} &= b \\ d - \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} &= c \end{aligned}$$
   (Alle Quadratwurzeln sind nichtnegativ.)

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.
Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.

Quelle der Beispiele: Angabezettel eines Teilnehmers / einer Teilnehmerin

27. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Cetniewo 2004

Einzelwettbewerb 2. Tag 25. Juni 2004

4. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die $n^{10} + n^5 + 1$ eine Primzahl ist.

5. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 27 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^{24} \end{aligned}$$

   über den positiven reellen Zahlen lösbar ist.

6. Für $n = 2^m$ (m ist eine positive ganze Zahl) betrachte man die Menge $M(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ natürlicher Zahlen.
   Man zeige: Es gibt eine Anordnung $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der Elemente von $M(n)$, sodaß für alle $1 \leq i < j < k \leq n$ gilt: $a_j - a_i \neq a_k - a_j$.

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.
Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.

Quelle der Beispiele: Angabezettel eines Teilnehmers / einer Teilnehmerin

27. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Cetniewo 2004

Mannschaftswettbewerb 26. Juni 2004

7. Man bestimme alle Funktionen f, definiert auf der Menge der positiven ganzen Zahlen mit ganzzahligen Funktionswerten, die die folgende Bedingung erfüllen:
Für alle Paare (x, y) teilerfremder, positiver ganzer Zahlen gilt

$$f(x + y) = f(x + 1) + f(y + 1)$$

8. (A) Man zeige: Für $n = 4$ oder $n \geq 6$ kann jedes Dreieck ABC in n zum Dreieck ABC ähnliche (nicht notwendigerweise kongruente) Dreiecke zerlegt werden.
   (B) Man zeige: Ein gleichseitiges Dreieck kann weder in 3 noch in 5 gleichseitige Dreiecke zerlegt werden.
   (C) Gibt es ein Dreieck ABC, das sowohl in 3 als auch in 5 Dreiecke (analog zu Aufgabe A) zerlegt werden kann? (Man gebe entweder ein Dreieck und solche Zerlegungen an oder beweise, daß kein solches Dreieck existiert.)

9. Gegeben sind die zweiseitigen Folgen

$$\langle \ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle, \langle \ldots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle, \langle \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots \rangle$$

positiver reeller Zahlen. Für jede ganze Zahl n gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} a_n &\geq \frac{1}{2}(b_{n+1} + c_{n-1}) \\ b_n &\geq \frac{1}{2}(c_{n+1} + a_{n-1}) \\ c_n &\geq \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n-1}) \end{aligned}$$

Man bestimme $a_{2005}, b_{2005}, c_{2005}$, falls $a_0 = 26, b_0 = 6, c_0 = 2004$.

10. Für jedes Polynom $Q(x)$ bezeichnet $M(Q)$ die Menge jener nichtnegativer ganzer Zahlen x, für die $0 < Q(x) < 2004$.
Wir betrachten Polynome $P_n(x)$ der Form $P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$, mit Koeffizienten $a_i = \pm 1$, für $i = 1, 2, \ldots, n-1$.
Für jedes $n = 3^k$ $(k > 0)$ bestimme man:
   (A) m_n - das Maximum der Anzahl der Elemente in $M(P_n)$ über alle solche Polynome $P_n(x)$;
   (B) alle Polynome $P_n(x)$, für die $|M(P_n)| = m_n$.

Arbeitszeit: 4,5 Stunden.
Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.

Quelle der Beispiele: Angabezettel eines Teilnehmers / einer Teilnehmerin