

26. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Graz 2003

Einzelwettbewerb 1. Tag 24. Juni 2003

1. Man bestimme alle Polynome $P(y)$ mit reellen Koeffizienten, sodaß für jede reelle Zahl x die Gleichung

$$P(x-1)P(x+1) = P(x^2-1)$$

gilt.

2. Sei a eine positive ganze Zahl. Wir definieren eine Folge $\langle a_n \rangle$ folgendermaßen:

(a) $a_0 = a$

(b) Für $n \geq 0$: $a_{n+1} = a_n + E(x)$ wobei für natürliche Zahlen x $E(x)$ die Einerstelle in der Dezimalschreibweise ist.

(A) Man zeige: Entweder ist die Folge $\langle a_n \rangle$ ab einem Index N konstant oder sie enthält unendlich viele durch $d = 3$ teilbare Glieder (oder beides).

(B) Für welche anderen natürlichen Zahlen d gilt die zu (A) analoge Behauptung? (Die Antwort ist zu begründen.)

3. Auf der Seite AB mit der Länge c des Dreiecks ABC definieren wir die Punkte T_1 und T_2 mit

$$AT_1 = T_1T_2 = T_2B$$

Analog definieren wir T_3 und T_4 auf BC (Länge a) mit

$$BT_3 = T_3T_4 = T_4C$$

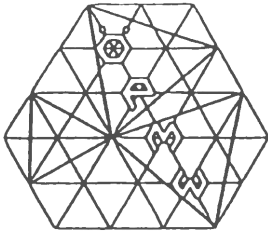
sowie T_5 und T_6 auf CA (Länge b) mit

$$CT_5 = T_5T_6 = T_6A$$

- (a) Man zeige: $a' = BT_5$, $b' = CT_1$ und $c' = AT_3$ sind die Seitenlängen eines Dreiecks $A'B'C'$.
- (b) Im Dreieck $A'B'C'$ definieren wir analog T'_1, T'_2, \dots, T'_6 . Es folgt daher (analog zu (a)), daß $a'' = B'T'_6$, $b'' = C'T'_2$ und $c'' = A'T'_4$ die Seitenlängen eines Dreiecks $A''B''C''$ sind. Man zeige, daß die Dreiecke $A''B''C''$ und ABC ähnlich sind und bestimme das Ähnlichkeitsverhältnis $a'' : a$.

Die Arbeitszeit beträgt 4,5 Stunden

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.



26. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Graz 2003

Einzelwettbewerb 2. Tag 25. Juni 2003

4. Wir nennen eine natürliche Zahl m eine "alpine Zahl", wenn eine natürliche Zahl $n = n(m)$ existiert, sodaß $2^{2n+1} + 1$ durch m teilbar ist.
Man zeige: Das Produkt von zwei alpinen Zahlen ist auch eine alpine Zahl.

5. Gegeben ist ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c und dem Flächeninhalt F .
 x, y und z sind die Abstände des Schwerpunkts des Dreiecks von den Eckpunkten.
Man zeige: Gilt die Ungleichung

$$x + y + z \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2F\sqrt{3}}$$

so ist das Dreieck gleichseitig.

6. Gegeben ist ein Tetraeder $ABCD$ mit der folgenden Eigenschaft:
Es existiert eine Kugel $\kappa = \kappa(ABC)$, sodaß

- (a) BC ist Durchmesser des Schnittkreises der Ebene BCD mit κ .
- (b) CA ist Durchmesser des Schnittkreises der Ebene CAD mit κ .

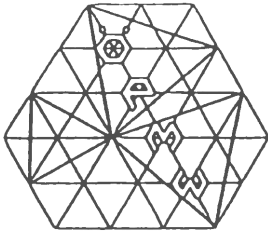
und

- (c) AB ist Durchmesser des Schnittkreises der Ebene ABD mit κ .

Man zeige: Es existieren auch Kugeln $\kappa(ABD)$, $\kappa(BCD)$ und $\kappa(CAD)$ mit zu (a), (b) und (c) analogen Eigenschaften.

Die Arbeitszeit beträgt 4,5 Stunden

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.



26. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb Graz 2003

Mannschaftswettbewerb 26. Juni 2003

7. Für jede natürliche Zahl $n > 1$ sei $f(n) = \frac{n^n - 1}{n - 1}$.

(a) Man zeige: $n!^{f(n)} \mid (n^n)!$

(b) Man finde möglichst viele (je mehr desto besser) natürliche Zahlen n sodaß $n!^{f(n)} \nmid (n^n)!$ gilt.

8. Gegeben sind reelle Zahlen $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{2003} \geq 0$.

Man zeige: für jede natürliche Zahl n gilt die Ungleichung

$$x_1^n - x_2^n + x_3^n - x_4^n + \dots - x_{2002}^n + x_{2003}^n \geq (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots - x_{2002} + x_{2003})^n$$

9. Wir wählen aus der Menge $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 26 paarweise verschiedene natürliche Zahlen.

Man zeige: Für jede solche Auswahl gibt es eine nicht leere Teilmenge der ausgewählten Zahlen, sodaß das Produkt ihrer Elemente das Quadrat einer natürlichen Zahl ist. (Besteht die Teilmenge nur aus einer Zahl x , so sei x selbst das erwähnte Produkt.)

10. (A) Gegeben ist ein Rechteck mit den Ausmaßen 31×5 unterteilt in Einheitsquadrate (wie ein Schachbrett).

Weiters verfügen wir über genügend viele rechteckige 1×5 Steine.

Man darf sie nur so auf das Rechteck legen, daß genau 5 Einheitsquadrate bedeckt sind. Verschiedene Steine dürfen einander nicht überlappen.

(a) Wie viele Steine muss man mindestens setzen, um das weitere zulässige Setzen von Steinen unmöglich zu machen?

(Eine solche Situation nennen wir eine Blockade.)

(b) Wie viele verschiedene Blockaden mit der minimalen Anzahl von verwendeten Steinen gibt es?

(Das Rechteck ist für uns starr. Je zwei nicht identische Blockaden werden als verschieden betrachtet.)

(B) Man beantworte die beiden Fragen (a) und (b) für ein 52×5 Rechteck.

Die Arbeitszeit beträgt 4,5 Stunden

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.