

24. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb St. Georgen im Attergau 2001

Einzelwettbewerb 1. Tag 27. Juni 2001

1. Man bestimme die Anzahl der positiven natürlichen Zahlen a , für welche nicht negative ganze Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_{2001}$ existieren, sodass

$$a^{x_0} = \sum_{k=1}^{2001} a^{x_k}$$

2. Sei n eine natürliche Zahl größer als 2.

Man löse in nicht negativen reellen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n das Gleichungssystem

$$x_k + x_{k+1} = x_{k+2}^2 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

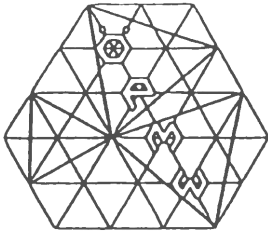
wobei $x_{n+1} = x_1$ und $x_{n+2} = x_2$ sei.

3. Seien a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks. Man beweise, dass

$$2 < \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} - \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \leq 3$$

Die Arbeitszeit beträgt 4,5 Stunden

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.



24. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb St. Georgen im Attergau 2001

Einzelwettbewerb 2. Tag 28. Juni 2001

4. Man beweise, dass, falls a, b, c, d die Längen aufeinander folgender Seiten eines nicht notwendig konvexen Vierecks mit der Fläche A sind, die Ungleichung

$$A \leq \frac{1}{2}(ac + bd)$$

gilt.

5. Mit einem Springer machen wir eine Rundreise auf einem Schachbrett, bei der wir jedes der 64 Felder genau einmal besuchen und sie der Reihe nach von 1 bis 64 numerieren.
Weiters wählen wir positive reelle Zahlen x_1, x_2, \dots, x_{64} .
Für jedes weiße Feld mit der Nummer i definieren wir

$$y_i = 1 + x_i^2 - \sqrt[3]{x_{i-1}^2 x_{i+1}}$$

und für jedes schwarze Feld mit der Nummer j

$$y_j = 1 + x_j^2 - \sqrt[3]{x_{j-1} x_{j+1}^2}$$

mit $x_0 = x_{64}$ und $x_{65} = x_1$.

Man zeige, dass

$$\sum_{i=1}^{64} y_i \geq 48$$

6. Für eine feste positive natürliche Zahl k betrachten wir die Folge $\langle a_n \rangle_{n \geq 0}$ ganzer Zahlen definiert durch

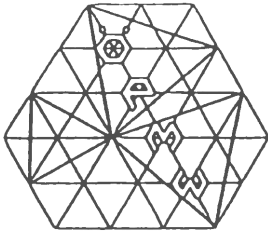
$$a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + \lceil \sqrt[k]{a_n} \rceil \text{ für alle } n \geq 0$$

wobei $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer oder gleich x ist.

Für jedes $k \geq 1$ bestimme man die Menge $A(k)$ bestehend aus allen ganzzahligen Werten in der Folge $\langle \sqrt[k]{a_n} \rangle_{n \geq 0}$

Die Arbeitszeit beträgt 4,5 Stunden

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.



24. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb St. Georgen im Attergau 2001

Mannschaftswettbewerb 29. Juni 2001

7. Wir betrachten positive natürliche Zahlen N , die in Dezimalschreibweise die Ziffer Null nicht enthalten und deren Ziffernsumme $S(N)$ ein Teiler von N ist.
- Man zeige, dass es unter den betrachteten Zahlen unendlich viele solche Zahlen N gibt, die in der Dezimalschreibweise die Ziffern 1 bis 9 gleich oft enthalten.
 - Man zeige, dass es für jede positive natürliche Zahl k unter den betrachteten Zahlen N eine k -stellige gibt.
8. Gegeben sei ein gerades Prisma mit der Höhe 1, dessen Basis ein regelmäßiges Achteck mit der Seitenlänge 1 ist, und M_1, M_2, \dots, M_{10} sind die Mittelpunkte seiner Flächen. Für einen beliebigen Punkt P im Inneren des Prismas bezeichnen wir mit P_i den zweiten Schnittpunkt der Gerade M_iP mit der Oberfläche des Prismas. Wir wählen einen Punkt P so, dass keiner seiner Punkte P_i auf einer Kante des Prismas liegt und in jeder Fläche genau einer der Punkte P_i liegt. Man zeige, dass
- $$\sum_{i=1}^{10} \frac{M_iP}{M_iP_i} = 5$$
9. Sei n eine natürliche Zahl mit $n > 10$ und A eine Menge mit $2n$ Elementen. Angenommen, dass A_1, A_2, \dots, A_m n -elementige Teilmengen von A sind mit der Eigenschaft, dass $A_i \cap A_j \cap A_k$ für $i \neq j \neq k \neq i$ höchstens 1 Element enthält. Man finde in Abhängigkeit von n den größten möglichen Wert von m .
10. Gegeben sei eine Folge $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2010} \rangle$ ganzer Zahlen. Die Summe von je 20 aufeinander folgenden Gliedern dieser Folge ist nicht negativ. Für jedes $i \in \{1, 2, \dots, 2009\}$ gilt $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$. Man finde den kleinsten möglichen Wert von $\sum_{i=1}^{2010} a_i$

Die Arbeitszeit beträgt 4,5 Stunden

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.