

## 23. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb 2000

Einzelwettbewerb 1. Tag 28. Juni 2000

1. Man bestimme alle Polynome  $P(x)$  mit reellen Koeffizienten, für die eine positive ganze Zahl  $n$  existiert, sodass für unendlich viele Werte von  $x$  die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \cdot \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \cdot P(x+k) = 0$$

gilt.

2. In einem Würfel mit der Seitenlänge 1 ist  $ABCD$  eine Seitenfläche und  $CG$  eine Kante orthogonal dazu. Seien  $k_1$  der Inkreis des Quadrats  $ABCD$  und  $k_2$  der Umkreis des Dreiecks  $B DG$ . (Kreislinien).

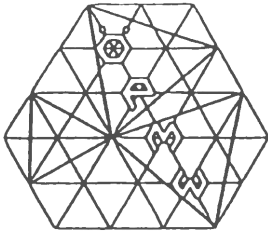
Man bestimme den kleinsten Wert des Abstands  $XY$  mit  $X \in k_1$  und  $Y \in k_2$ .

3. Für jede natürliche Zahl  $n \geq 3$  löse man in den reellen Zahlen das folgende Gleichungssystem.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^3 = x_2 + x_3 + 1 \\ \vdots \\ x_k^3 = x_{k+1} + x_{k+2} + 1 \\ \vdots \\ x_{n-1}^3 = x_n + x_1 + 1 \\ x_n^3 = x_1 + x_2 + 1 \end{array} \right.$$

Die Arbeitszeit beträgt 4,5 Stunden

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.



## 23. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb 2000

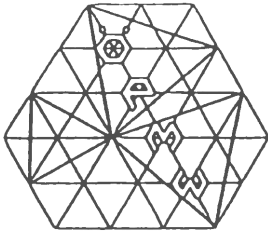
Einzelwettbewerb 2. Tag 29. Juni 2000

4. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen  $N$ , die keine Primfaktoren ungleich 2 und 5 haben, sodass  $N + 25$  das Quadrat einer ganzen Zahl ist.
5. Für welche natürlichen Zahlen  $n \geq 5$  kann man die Eckpunkte eines regelmäßigen  $n$ -Ecks mit höchstens 6 Farben so färben, dass in jeder Gruppe von 5 aufeinander folgenden Punkten 5 verschiedene Zahlen auftreten.
6. Wir betrachten den Baustein  $Q$  der Form  $Q = Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 \cup Q_5 \cup Q_6$ , wobei die  $Q_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 6$ ) sieben verschiedene Würfel mit der Seitenlänge 1 sind, sodass  $Q_0$  mit jedem der 6 anderen Würfel eine Seitenfläche gemeinsam hat.

Man entscheide, ob man den Raum mit unendlich vielen Bausteinen füllen kann, wobei jeder Baustein aus  $Q$  durch Parallelverschiebung entsteht, und keine zwei Bausteine einen inneren Punkt gemeinsam haben.

Die Arbeitszeit beträgt 4,5 Stunden

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.



## 23. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb 2000

Mannschaftswettbewerb 30. Juni 2000

7. In der Ebene ist das Dreieck  $A_0B_0C_0$  gegeben. Man betrachte die Dreiecke  $ABC$ , die folgende Bedingungen erfüllen.

(B1) Die Geraden  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  gehen entsprechend durch die Punkte  $C_0$ ,  $A_0$ ,  $B_0$ .

(B2) Die Dreiecke  $ABC$  und  $A_0B_0C_0$  sind ähnlich.

(D.h., es existiert eine Ähnlichkeit, die  $A$  in  $A_0$ ,  $B$  in  $B_0$  und  $C$  in  $C_0$  überführt.)

Man bestimme den geometrischen Ort der Umkreismittelpunkte aller dieser Dreiecke  $ABC$ .

8. In der Ebene seien 27 Punkte gegeben, von denen keine 3 auf einer Geraden liegen. Vier der Punkte sind die Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 und die restlichen 23 Punkte liegen im Inneren des Quadrats.

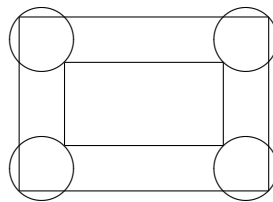
Man zeige, dass es unter den gegebenen Punkten 3 gibt, die Eckpunkte eines Dreiecks mit Flächeninhalt nicht größer als  $1/48$  sind.

9. Man beweise für alle nicht negativen reellen Zahlen  $a, b, c$  mit  $a + b + c = 1$  die Ungleichungen:

$$2 \leq (1 - a)^2 + (1 - b)^2 + (1 - c)^2 \leq (1 + a) \cdot (1 + b) \cdot (1 + c)$$

Für jede Ungleichung entscheide man, wann Gleichheit gilt.

10. Der Plan des Schlosses Baranów Sandomierski kann näherungsweise als der unten gezeichnete Graph mit 16 Punkten skizziert werden.



Ein Nachtwächter plant eine Rundwanderung entlang der Kanten des Graphen.

- (a) Wieviele Rundwanderwege (ohne Berücksichtigung der Wanderrichtung) existieren, die durch jeden Knoten genau einmal gehen?
- (b) Wieviele Rundwanderungen (mit Berücksichtigung der Wanderrichtung) ohne Selbstüberschneidungen existieren, die jede Kante genau einmal durchlaufen.

Die Arbeitszeit beträgt 4,5 Stunden

Bei jedem Beispiel können 8 Punkte erreicht werden.