



## 42. Österreichische Mathematische Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

16. Juni 2011

1. Es sei  $x$  die kleinste positive ganze Zahl, für die  $2x$  das Quadrat einer ganzen Zahl,  $3x$  die dritte Potenz einer ganzen Zahl und  $5x$  die fünfte Potenz einer ganzen Zahl ist.

Man bestimme die Primfaktorzerlegung von  $x$ .

*St. Wagner, Universität Stellenbosch*

2. Es seien  $p$  und  $q$  reelle Zahlen. Die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

habe die reellen Lösungen  $x_1$  und  $x_2$ .

Zusätzlich gelten die folgenden zwei Bedingungen:

- (i) Die Zahlen  $x_1$  und  $x_2$  unterscheiden sich voneinander um genau 1.
- (ii) Die Zahlen  $p$  und  $q$  unterscheiden sich voneinander um genau 1.

Man zeige, dass dann  $p$ ,  $q$ ,  $x_1$  und  $x_2$  ganze Zahlen sind.

*G. Kirchner, Universität Innsbruck*

3. Es seien  $x$ ,  $y$  positive reelle Zahlen mit

$$x + y + xy = 3.$$

Man beweise, dass

$$x + y \geq 2.$$

Wann gilt Gleichheit?

*K. Czakler, GRG 21, Wien*

4. Es sei  $ABC$  ein gleichschenkliges Dreieck mit  $\overline{AC} = \overline{BC}$ . Auf dem Bogen  $CA$  seines Umkreises, der  $B$  nicht enthält, liege ein Punkt  $P$ . Der Fußpunkt der Normalen durch  $C$  auf die Gerade  $AP$  werde mit  $E$  bezeichnet, der Fußpunkt der Normalen durch  $C$  auf die Gerade  $BP$  werde mit  $F$  bezeichnet.

Man beweise, dass die Strecken  $AE$  und  $BF$  gleich lang sind.

*W. Janous, WRG Ursulinen, Innsbruck*