



38. Österreichische Mathematische Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

14. Juni 2007

1. Man zeige, dass die Zahl $9^n + 8^n + 7^n + 6^n - 4^n - 3^n - 2^n - 1^n$ für alle natürlichen Zahlen n durch 10 teilbar ist.

W. Janous, WRG Ursulinen, Innsbruck

2. Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung

$$[x]^2 + [x] = x^2 - \frac{1}{4}.$$

Dabei bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

St. Wagner, Universität Stellenbosch, Südafrika

3. Für reelle Zahlen $x \geq 0$ und $y \geq 0$ sind $A = \frac{x+y}{2}$ das arithmetische Mittel und $G = \sqrt{xy}$ das geometrische Mittel von x und y . Mit $W = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}$ wird das arithmetische Mittel von \sqrt{x} und \sqrt{y} bezeichnet.

Man zeige, dass

$$G \leq W^2 \leq A$$

gilt. Für welche x und y gilt $G = W^2 = A$?

R. Henner, BRG 18, Wien

4. Wir betrachten ein Parallelogramm $ABCD$, in dem der Mittelpunkt M der Seite CD auf der Winkelsymmetrale von $\angle BAD$ liegt.

Man zeige, dass $\angle AMB$ ein rechter Winkel ist.

St. Wagner, Universität Stellenbosch, Südafrika