



37. Österreichische Mathematik Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

13. Juni 2006

1. Gibt es ganze Zahlen a, b , sodass $a^{2006} + b^{2006} + 1$ durch 2006^2 teilbar ist?
2. Für welche reellen Zahlen a ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$(x^2 + ax + 4)(x^2 - 5x + 6) \leq 0$$

ein Intervall?

3. Sei n eine gerade positive ganze Zahl.

Wir betrachten Rechtecke mit den ganzzahligen Seitenlängen k und $k + 1$, wobei k größer als $\frac{n}{2}$ und höchstens gleich n ist.

Man zeige: Für alle geraden positiven ganzen Zahlen n ist die Summe der Flächen der jeweils betrachteten Rechtecke gleich

$$\frac{n(n+2)(7n+4)}{24}.$$

4. Man zeige: Hat ein Dreieck zwei gleich große Ankreise, so ist es gleichschenkelig.

(Hinweis: Der Ankreis des Dreiecks ABC zur Seite a berührt die Verlängerungen der Seiten AB und AC und die Seite BC .)