36. Österreichische Mathematik Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

16. Juni 2005

1. Man zeige: Es gibt keine positiven ganzen Zahlen a und b mit $4a(a+1) = b(b+3)$.

2. Man bestimme die Anzahl der Paare ganzer Zahlen (x, y), sodass
$$(|x| - 2)^2 + (|y| - 2)^2 < 5.$$

3. Man bestimme alle Tripel (x, y, z) reeler Zahlen, die gleichzeitig die folgenden drei Gleichungen erfüllen.
$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \{y\} &= z \\ \lfloor y \rfloor + \{z\} &= x \\ \lfloor z \rfloor + \{x\} &= y \end{aligned}$$
(Für jede reelle Zahl u ist $\lfloor u \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich u und $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$.)

4. Gegeben ist das Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt 2000. P, Q, R seien die Mittelpunkte der Seiten BC, AC, AB. U, V, W seien die Mittelpunkte der Seiten QR, RP, PQ. Die Längen der Strecken AU, BV, CW seien x, y, z.

   Man zeige, dass ein Dreieck mit den Seiten x, y, z existiert und berechne seinen Flächeninhalt.