31. Österreichische Mathematik Olympiade
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger
15. Juni 2000

1. Es sei a eine reelle Zahl. Man bestimme in Abhängigkeit von a alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die die Gleichung $(x - y^2)(y - x^2) + x^3 + y^3 = a$ erfüllen.

2. Es seien a und b positive reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung
$$\frac{(a+b)^3}{a^2 b} \geq \frac{27}{4}.$$
Wann gilt Gleichheit?

3. Eine „nette" zweistellige Zahl is sowohl Vielfaches des Produkts ihrer Ziffern als auch Vielfaches der Summe ihrer Ziffern.

   Wieviele solche zweistelligen Zahlen gibt es?

   Wie groß ist jeweils der Quotient aus Zahl und Ziffernsumme?

4. Sei $ABCDEFG$ die Hälfte eines regelmäßigen Zwölfecks.

   Sei P der Schnittpunkt der Geraden AB und GF und Q der Schnittpunkt der Geraden AC und GE.

   Man zeige: Q ist der Umkreismittelpunkt ds Dreiecks AGP.