41. Österreichische Mathematik Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

15. April 2010

1. Seien $0 \leq a, b \leq 1$ reelle Zahlen. Beweise, dass dann

$$\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)} \leq 1$$

gilt.

2. Man löse folgende Gleichung für reelle x, y, z:

$$4x^4 - x^2(4y^4 + 4z^4 - 1) - 2xyz + y^8 + 2y^4z^4 + y^2z^2 + z^8 = 0$$

3. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und sei D ein Punkt auf der Seite BC. Seien U bzw. V die Umkreismittelpunkte der Dreiecke $\triangle ABD$ bzw. $\triangle ADC$. Zeige, dass die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AUV$ ähnlich sind.

4. Sei $(b_n)_{n\geq 0} = \sum_{k=0}^{n}(a_0 + kd)$ für positive ganze Zahlen a_0 und d. Wir betrachten alle solchen Folgen, für die $b_i = 2010$ für ein positives ganzes i gilt. Bestimme den größtmöglichen Wert von i und für diesen auch die Zahlen a_0 bzw d.