



40. Österreichische Mathematik Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

23. April 2009

1. Man gebe einen möglichst großen Bereich $M \subseteq \mathbb{R}^+$ an, sodass für alle $a, b, c, d \in M$ die Ungleichung

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \geq \sqrt{a+b} + \sqrt{c+d}$$

gilt.

Gilt dann auch für alle $a, b, c, d \in M$ die Ungleichung

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \geq \sqrt{a+c} + \sqrt{b+d}?$$

(Bemerkung: \mathbb{R}^+ ist die Menge der positiven reellen Zahlen.)

2. Wie viele ganzzahlige Lösungen $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ hat die Gleichung

$$2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 9?$$

3. Gegeben ist das spitzwinkelige Dreieck ABC (Durchlaufsin ABC gegen den Uhrzeigersinn) mit den Höhenfußpunkten D (auf BC), E (auf AC) und F (auf AB). Weiters seien P , Q und R wie folgt definiert:

- P ist im Dreieck CFB der Höhenfußpunkt von F auf BC .
- Q ist im Dreieck ADC der Höhenfußpunkt von D auf AC .
- R ist im Dreieck AEB der Höhenfußpunkt von E auf AB .

Die sechs Punkte D , E , F , P , Q und R bilden bei passender Nummerierung $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$ (gegen den Uhrzeigersinn mit $T_1 = P$) ein konvexes Sechseck (alle Winkel kleiner als 180 Grad).

Man zeige, dass in diesem konvexen Sechseck kein Punkt existiert, der auf allen drei Diagonalen T_1T_4 , T_3T_6 und T_5T_2 liegt.

4. Zwei unendliche arithmetische Folgen $\langle a_0, a_1, \dots, a_n = a_0 + nd, \dots \rangle$ sind wesentlich verschieden, wenn sie sich nicht nur durch das Fehlen endlich vieler Anfangsglieder bei der einen von ihnen unterscheiden.

Wie viele paarweise wesentlich verschiedene nicht konstante arithmetische Folgen aus lauter positiven natürlichen Zahlen gibt es, die eine unendliche nicht konstante geometrische Folge enthalten, deren drittes Glied $40 \cdot 2009 = 80360$ ist?