# 39. Österreichische Mathematik Olympiade

## Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

24. April 2008

1. Man zeige: Für alle reellen Zahlen $a, b, c$ mit $0 < a, b, c < 1$ gilt:

$$\sqrt{a^2bc+ab^2c+abc^2}+\sqrt{(1-a)^2(1-b)(1-c)+(1-a)(1-b)^2(1-c)+(1-a)(1-b)(1-c)^2}<\sqrt{3}$$

2. Für eine reelle Zahl $x$ sei $[x]$ die nächst kleinere ganze Zahl an $x$, d.h. jene ganze Zahl $g$ mit $g \leq x < g+1$ und $\{x\} = x - [x]$ sei der „Dezimalanteil von $x$“.
Man bestimme alle Tripel $(a, b, c)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned}\{a\}+[b]+\{c\}&=2.9\\ \{b\}+[c]+\{a\}&=5.3\\ \{c\}+[a]+\{b\}&=4.0\end{aligned}$$

3. Gegeben ist ein spitzwinkeliges Dreieck $ABC$.
Man bestimme alle Punkte $P$ im Inneren des Dreiecks mit:

$$1 \leq \frac{\measuredangle APB}{\measuredangle ACB}, \frac{\measuredangle BPC}{\measuredangle BAC}, \frac{\measuredangle CPA}{\measuredangle CBA} \leq 2$$

4. Für jede positive ganze Zahl $n$ sei

$$a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{(2k+1)^n}{k}$$

Man zeige: $a_n$ ist für kein $n$ eine natürliche Zahl.