38. Österreichische Mathematik Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

24. April 2007

1. Seien $0 < x_0, x_1, \ldots, x_{669} < 1$ paarweise verschiedene reelle Zahlen.
   Man zeige: Es existiert ein Paar x_i, x_j mit
   $$0 < x_i x_j (x_j - x_i) < \frac{1}{2007}$$

2. Man bestimme alle Quintupel positiver ganzer Zahlen $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > 0$ mit
   $$\left\lfloor \frac{x_1 + x_2}{3} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{x_2 + x_3}{3} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{x_3 + x_4}{3} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{x_4 + x_5}{3} \right\rfloor^2 = 38$$
   (Hinweis: $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.)

3. Sei a eine positive reelle Zahl und n eine nicht negative ganze Zahl.
   Man vergleiche S und T nach ihrer Größe:
   $$S = \sum_{k=-2n}^{2n+1} \frac{(k-1)^2}{a^{\left|\lfloor \frac{k}{2} \rfloor\right|}} \qquad T = \sum_{k=-2n}^{2n+1} \frac{k^2}{a^{\left|\lfloor \frac{k}{2} \rfloor\right|}}$$
   (Hinweis: $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.)

4. In einem konvexen Viereck $ABCD$ (alle Innenwinkel kleiner als 180°) sei M der Schnittpunkt der Diagonalen.
   Man bestimme alle solchen Vierecke, für die eine Gerade g durch M existiert, die die Seite AB in P und die Seite CD in Q schneidet, sodass die vier Dreiecke APM, BPM, CQM und DQM ähnliche Dreiecke sind. (Die Ecken müssen nicht in der jeweiligen Reihenfolge einander entsprechen)