37. Österreichische Mathematik Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

27. April 2006

1. Es seien $0 < x < y$ reelle Zahlen und

$$H = \frac{2xy}{x+y}, \quad G = \sqrt{xy}, \quad A = \frac{x+y}{2}, \quad Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

das harmonische, geometrische, arithmetische und quadratische Mittel von x und y. Bekanntermaßen gilt $H < G < A < Q$.
Man ordne die Intervalle $[H, G]$, $[G, A]$ und $[A, Q]$ aufsteigend nach ihrer Länge.

2. Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl und a eine reelle Zahl.
Man bestimme alle reellen Lösungen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 &= 0 \\ x_2 + a^2x_3 &= 0 \\ &\vdots \\ x_k + a^kx_{k+1} &= 0 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + a^{n-1}x_n &= 0 \\ a^nx_1 + x_n &= 0 \end{aligned}$$

3. Im nicht gleichschenkeligen Dreieck ABC sei w die Symmetrale des Außenwinkels bei C (äußere Winkelsymmetrale von γ). Der Schnittpunkt von w mit der Verlängerung von AB sei D. Sei nun k_A der Umkreis des Dreiecks ADC und analog k_B der Umkreis des Dreiecks BDC. Sei t_A die Tangente an k_A in A und analog t_B die Tangente an k_B in B. Sei P der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten.
Gegeben sind nun die Punkte A und B.
Man bestimme die Menge der Punkte $P = P(C)$ über alle Punkte C, sodass ABC ein nicht gleichschenkeliges, spitzwinkeliges Dreieck ist.

4. Es sei $\langle h_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ eine harmonische Folge positiver rationaler Zahlen (d.h. jedes h_n ist das harmonische Mittel der beiden Nachbarn h_{n-1} und h_{n+1}, also $h_n = \frac{2h_{n-1}h_{n+1}}{h_{n-1}+h_{n+1}}$).
Man zeige: Enthält die Folge ein Glied h_j, das das Quadrat einer rationalen Zahl ist, so enthält sie unendlich viele Glieder h_k, die Quadrate rationaler Zahlen sind.