



35. Österreichische Mathematik Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

20. April 2004

1. Man bestimme alle ganzen Zahlen a und b , sodaß $(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4$.
2. Man löse im Bereich der reellen Zahlen die Gleichung:

$$\sqrt{4 - x\sqrt{4 - (x - 2)\sqrt{1 + (x - 5)(x - 7)}}} = \frac{5x - 6 - x^2}{2}$$

(Alle Quadratwurzeln sind nicht negativ.)

3. Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$ mit $\angle ADC = \angle BCD > 90^\circ$.
 E sei der Schnittpunkt der Geraden AC mit der Parallelen zu AD durch B und F sei der Schnittpunkt der Geraden BD mit der Parallelen zu BC durch A .
Man zeige: EF ist parallel zu CD .
4. Es ist die Folge $\langle x_n \rangle$ definiert durch

$$x_{n+1} = \left(\frac{n}{2004} + \frac{1}{n} \right) x_n^2 - \frac{n^3}{2004} + 1 \text{ für } n > 0$$

Es sei x_1 eine natürliche Zahl kleiner als 204 so gewählt, daß alle Folgenglieder natürliche Zahlen sind.

Man zeige, daß dann unendlich viele Primzahlen in der Folge vorkommen.