



34. Österreichische Mathematik Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

29. April 2003

1. Man bestimme den kleinsten Wert, den $\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)}$ für positive reelle Zahlen a, b, c mit $a+b+c \leq 3$ annimmt.
2. Man bestimme alle Primzahlen p , für die $5^p + 4p^4$ eine Quadratzahl ist.
3. Gegeben sind zwei parallele Geraden g und h sowie ein Punkt P , der außerhalb des von g und h gebildeten Streifens liegt. Durch P werden nun drei paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2 und g_3 gezeichnet, die g in den Punkten A_1, A_2, A_3 und h in den Punkten B_1, B_2, B_3 schneiden. Die Punkte $C_{12} = (A_1B_2) \cap (A_2B_1)$, $C_{13} = (A_1B_3) \cap (A_3B_1)$, $C_{23} = (A_2B_3) \cap (A_3B_2)$ sind die Schnittpunkte der entsprechenden Geraden.
Man zeige:
 - (a) Es gibt genau eine Gerade n , die die Punkte C_{12}, C_{13}, C_{23} enthält und
 - (b) n ist parallel zu g und h .
4. Für jede reelle Zahl b bestimme man alle reellen Zahlen x mit $x - b = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.