33. Österreichische Mathematik Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

23. April 2002

1. Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl x, sodaß alle folgenden Brüche gekürzt sind, d.h. Zähler und Nenner relativ prim sind.

$$\frac{3x+9}{8}, \frac{3x+10}{9}, \frac{3x+11}{10}, \ldots, \frac{3x+49}{48}$$

2. Man löse das folgende Gleichungssystem über den reellen Zahlen.

$$\begin{aligned} 2x_1 &= x_5^2 - 23 \\ 4x_2 &= x_1^2 + 7 \\ 6x_3 &= x_2^2 + 14 \\ 8x_4 &= x_3^2 + 23 \\ 10x_5 &= x_4^2 + 34 \end{aligned}$$

3. Im konvexen (alle Innenwinkel kleiner als 180°) Sechseck $ABCDEF$ mit dem Umfang s haben die Diagonaldreiecke ACE bzw. BDF die Umfänge u bzw. v.

   (a) Man zeige die Ungleichung $\frac{1}{2} < \frac{s}{u+v} < 1$.

   (b) Man untersuche ob 1 durch eine kleinere oder $\frac{1}{2}$ durch eine größere Zahl ersetzt werden kann, und die Unlgeichung für alle konvexe Sechsecke gültig bleibt.

4. Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_{2002}$ reelle Zahlen.

   (a) Man zeige: Für den kleinsten der Werte $a_k\,(1 - a_{2002-k})$ $(0 \le k \le 2002)$ gilt, er is kleiner oder gleich $\frac{1}{4}$.

   (b) Gilt diese Aussage auch stets für den kleinsten der Werte $a_k\,(1 - a_{2003-k})$ $(1 \le k \le 2002)$?

   (c) Man zeige für positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_{2002}$: Für den kleinsten der Werte $a_k\,(1 - a_{2003-k})$ $(1 \le k \le 2002)$ gilt, er ist kleiner oder gleich $\frac{1}{4}$.