



32. Österreichische Mathematik Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

24. April 2001

1. Sei n eine ganze Zahl. Wir betrachten $S(n)$, die Summe der 2001 Potenzen von n mit den Exponenten 0 bis 2000. Also $S(n) = \sum_{k=0}^{2000} n^k$.
Was ist die Einerziffer von $S(n)$ im Dezimalsystem?
2. Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung

$$(x+1)^{2001} + (x+1)^{2000}(x-2) + (x+1)^{1999}(x-2)^2 + \dots \\ + (x+1)^2(x-2)^{1999} + (x+1)(x-2)^{2000} + (x-2)^{2001} = 0$$

3. Von einem konvexen Fünfeck $ABCDE$ sind die Flächen der Dreiecke ABC , ABD , ACD und ADE gleich und haben den Wert F . Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks BCE ?
4. Es sei $A_0 = \{1, 2\}$ und für $n > 0$ entsteht A_n aus A_{n-1} indem man zu A_{n-1} die natürlichen Zahlen hinzu nimmt, die sich als Summe von zwei verschiedenen Zahlen aus A_{n-1} darstellen lassen.
Es sei $a_n = |A_n|$ die Anzahl der Zahlen in A_n .
Man bestimme a_n als Funktion von n .