



31. Österreichische Mathematik Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

13. April 2000

1. Für welche natürlichen Zahlen n gilt $2^n > 10n^2 - 60n + 80$?
2. Für jede reelle Zahl a bestimme man alle reellen Zahlen x , die die folgende Gleichung erfüllen.

$$(2x + 1)^4 + ax(x + 1) - \frac{a}{2} = 0$$

3. Wir betrachten zwei Kreise $k_1(M_1; r_1)$ und $k_2(M_2; r_2)$ mit $z = M_1M_2 > r_1 + r_2$ und eine gemeinsame äußere Tangente mit den Berührungspunkten P_1 und P_2 (sie liegen also auf derselben Seite der Verbindungsgeraden M_1M_2). Wir verändern nun die Radien so, daß ihre Summe $r_1 + r_2 = c$ konstant bleibt. Welche Menge von Punkten durchläuft der Mittelpunkt der Tangentenstrecke P_1P_2 , wenn r_1 von 0 bis c variiert?

4. Wir betrachten die durch Rekursion $u_{n+1} = \frac{u_n(u_n + 1)}{n}$ für $n \geq 1$ definierte Folge $\langle u_n \rangle$.

- (a) Man bestimme die Folgenglieder für $u_1 = 1$.
- (b) Man zeige: Ist ein Folgenglied eine nicht ganzzahlige rationale Zahl, so sind auch alle nachfolgenden Folgenglieder nicht ganzzahlig.
- (c) Man zeige: Für jede natürliche Zahl K gibt es ein $u_1 > 1$, sodaß die ersten K Glieder der Folge natürliche Zahlen sind.