



41. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 1, 13. Mai 2010

1. Es sei $f(n) = \sum_{k=0}^{2010} n^k = 1 + n + n^2 + \dots + n^{2010}$.

Man zeige, dass für jede natürliche Zahl m mit $2 \leq m \leq 2010$ gilt:

Es gibt keine natürliche Zahl n , sodass $f(n)$ durch m teilbar ist.

2. Für jede positive ganze Zahl n wird eine Funktion $f_n(x) = \sum_{k=1}^n |x - k|$ für alle reellen Zahlen x definiert.

Man bestimme für jede zweistellige Zahl n (in Dezimalschreibweise) die Lösungsmenge L_n der Ungleichung $f_n(x) < 41$.

3. Gegeben sei die Menge $M_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ der natürlichen Zahlen kleiner oder gleich n . Wir nennen eine Teilmenge S von M_n *ausgezeichnet*, wenn sie nicht leer ist und für jede natürliche Zahl $k \in S$ eine k -elementige Teilmenge T_k von S existiert.

Man bestimme $a(n)$, die Anzahl der ausgezeichneten Teilmengen von M_n .

4. Zeichnet man in einem Dreieck ABC durch einen inneren Punkt P die drei Seitenparallelen, so zerlegen diese das Dreieck ABC in drei Vierecke (in den Ecken) und drei Dreiecke, die jeweils auf einer Seite aufsitzen.

(a) Man zeige: Wählt man für P den Inkreismittelpunkt I , so gilt für jedes entstandene kleine Dreieck, dass sein Umfang gleich ist der Länge der Seite, auf der das Dreieck aufsitzt.

(b) Man bestimme für ein gegebenes Dreieck ABC alle inneren Punkte P , sodass für jedes entstandene kleine Dreieck gilt, dass sein Umfang gleich ist der Länge der Seite, auf der das Dreieck aufsitzt.

(c) Für welchen inneren Punkt P ist die Summe der Flächeninhalte der drei Dreiecke minimal?



41. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 1, 2. Juni 2010

1. Man zeige: Für alle Tripel paarweise verschiedener ganzer Zahlen x, y, z ist

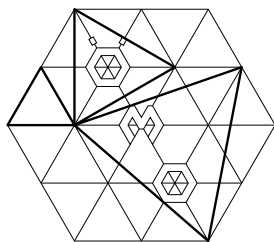
$$\frac{(x-y)^7 + (y-z)^7 + (z-x)^7 - (x-y)(y-z)(z-x)((x-y)^4 + (y-z)^4 + (z-x)^4)}{(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5} \geq 3.$$

Wann gilt Gleichheit?

2. Man bestimme alle Tripel (x, y, z) positiver natürlicher Zahlen $x > y > z > 0$, sodass $x^2 = y \cdot 2^z + 1$.
3. Bei einem kreisrunden Billardtisch prallt eine Kugel an der Bande genau so ab, als ob die Bande die Tangente an den Kreis im Auftreffpunkt wäre.

Auf einem kreisrunden Billardtisch ist ein regelmäßiges Sechseck mit den Ecken auf dem Kreis gezeichnet.

Auf dem Umfang des Sechsecks, aber in keiner seiner Ecken, ist eine (punktförmige) Kugel platziert. Man beschreibe einen periodischen Kurs dieser Kugel mit genau vier verschiedenen Bandenpunkten. In wie vielen verschiedenen Stoßrichtungen kann die Kugel auf einen solchen Kurs gebracht werden?



41. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 2, 3. Juni 2010

4. Im Gitterausschnitt mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(n,0)$, $(n,2)$ und $(0,2)$ kann man von einem Gitterpunkt (a,b) entweder zu $(a+1,b)$ oder zu $(a+1,b+1)$ oder zu $(a,b-1)$ ziehen, sofern der zweite Punkt auch zum Ausschnitt gehört.

Wie viele Wege von $(0,0)$ zu $(n,2)$ unter Berücksichtigung dieser Zugregeln gibt es?

5. Zwei Zerlegungen eines Quadrats in drei Rechtecke heißen wesentlich verschieden, wenn man nicht durch Umordnen der Rechtecke von einer zur anderen gelangen kann.

Wie viele wesentlich verschiedene Zerlegungen eines 2010×2010 Quadrats in drei Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen gibt es, bei denen der Flächeninhalt eines Rechtecks das arithmetische Mittel der Flächeninhalte der beiden anderen ist?

6. In einem konvexen Sechseck heißt eine Diagonale eine „lange“ Diagonale, wenn sie das Sechseck in zwei Vierecke zerlegt.

Je zwei lange Diagonalen zerlegen das Sechseck in zwei Dreiecke und zwei Vierecke.

Gegeben sei nun ein konvexes Sechseck mit der Eigenschaft, dass bei jeder Zerlegung durch zwei lange Diagonalen die auftretenden Dreiecke jeweils gleichschenkelig mit den Sechseckseiten als Basen sind.

Man zeige, dass dann das Sechseck einen Umkreis hat.