40. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 1, 17. Mai 2009

1. Man zeige, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die folgende Ungleichung gilt.

$$3^{n^2} > (n!)^4$$

2. Wir verallgemeinern die Funktionen Fakultät $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$ und Doppelfakultät $n!! = n(n-2)(n-4)\dots 1$ für ungerade n und $n!! = n(n-2)(n-4)\dots 2$ für gerade n. Wir definieren für $n > 0$ die k-fache Fakultät $F_k(n) = n(n-k)(n-2k)\dots r$ mit $1 \leq r \leq k$ und $n \equiv r \pmod{k}$. Weiters sei $F_k(0) = 1$.

   Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, sodass $F_{20}(n) + 2009$ eine Quadratzahl (das Quadrat einer natürlichen Zahl) ist.

3. Gegeben ist ein Rundkurs mit $\boldsymbol{n}$ **Stationen** ($n > 1$), der in beiden Richtungen befahrbar ist. Jeden Abschnitt zwischen zwei benachbarten Stationen nennen wir Teilstrecke. Eine der Stationen heißt Raach.

   Ein Bus soll in Raach starten und nach Durchfahren von $\boldsymbol{n+2}$ **Teilstrecken** nach Raach zurückkehren, dabei hat er **jede Station mindestens einmal** zu besuchen.

   Man bestimme für jedes $n > 1$ die Anzahl $f(n)$ der Touren, die diese Bedingungen erfüllen.

4. Seien D, E und F die Seitenmittelpunkte des Dreiecks ABC (D auf BC, E auf CA und F auf AB).

   Weiters sei $H_aH_bH_c$ das Höhenfußpunktdreieck des Dreiecks ABC.

   P, Q und R seien die Seitenmittelpunkte des Dreiecks $H_aH_bH_c$ (P auf H_bH_c, Q auf H_cH_a und R auf H_aH_b).

   Man zeige: Die Geraden PD, QE und RF haben einen Punkt gemeinsam.

40. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 1, 10. Juni 2009

1. $A_{km}(x)$ ist ein Potenzturm bestehend von unten nach oben aus k Zweiern, einem x und dann m Zweiern. $B_k(y)$ ist ebenfalls ein Potenzturm, der aber nur aus k Vierern und einem y ganz oben besteht. Also

$$A_{km}(x) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{x^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}}}} \qquad \text{und} \qquad B_k(y) = 4^{4^{\cdot^{\cdot^{4^{y}}}}}.$$

Man bestimme abhängig von der positiven ganzen Zahl $k > 0$ alle Paare (x, y) nicht negativer ganzer Zahlen, sodass $A_{kk}(x) = B_k(y)$.

Bemerkung: Ein Potenzturm der Form a^{b^c} wird berechnet als $a^{(b^c)}$.

2. (a) Für positive ganze Zahlen $a < b$ bezeichne

$$M(a,b) = \frac{\sum_{k=a}^{b} \sqrt{k^2+3k+3}}{b-a+1}$$

das arithmetische Mittel der Zahlen $\sqrt{k^2+3k+3}$ über $a \leq k \leq b$. Man bestimme $K(a,b) = [M(a,b)]$.

(b) Man bestimme weiters

$$N(a,b) = \frac{\sum_{k=a}^{b} \left[\sqrt{k^2+3k+3}\right]}{b-a+1},$$

das arithmetische Mittel der Zahlen $\left[\sqrt{k^2+3k+3}\right]$ über $a \leq k \leq b$.

(Dabei ist $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.)

3. Gegeben ist das Dreieck ABC. Gesucht sind alle Punkte P im Inneren des Dreiecks, für die das Folgende gilt:

Sei D der Schnittpunkt der Verlängerung von AP mit der Seite BC und sei A' jener Punkt auf dieser Verlängerung, für den $\overline{AD} = \overline{DA'}$ gilt. Dann sind die Dreiecke ABC und $A'BC$ kongruent. (Dabei müssen die Punkte einander nicht unbedingt in dieser Reihenfolge entsprechen.) Definiert man die Punkte B' und C' analog, so sind auch die Dreiecke $AB'C$ und ABC' kongruent zu ABC.

40. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 2, 11. Juni 2009

4. Wir betrachten für jede positive ganze Zahl a die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_0 = a$ und $a_n = a_{n-1} + 40^{n!}$ für $n > 0$.

   Man zeige, dass jede dieser Folgen unendlich viele durch 2009 teilbare Zahlen enthält.

5. Es sei $n > 1$ und für $1 \leq k \leq n$ sei $p_k = p_k(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ die k-te elementarsymmetrische Grundfunktion der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, also die Summe der Produkte aus jeweils k dieser Zahlen.

   Es sei $P = P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ die Summe der p_k mit ungeradem Index k kleiner oder gleich n.

   Wie viele verschiedene Werte treten unter den a_j auf, falls alle a_j $(1 \leq j \leq n)$ und P Primzahlen sind?

6. Sei $ABCD$ ein Viereck und seien P, Q, R und S die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD und DA. Das Viereck $PQRS$ heißt Seitenmittenviereck von $ABCD$.

   Man bestimme alle Tangentenvierecke mit einem Quadrat als Seitenmittenviereck.