



39. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 1, 22. Mai 2008

1. Welchen kleinsten positiven Rest ergibt

$$1 \cdot \binom{2008}{0} + 2 \cdot \binom{2008}{1} + 3 \cdot \binom{2008}{2} + \cdots + 2009 \cdot \binom{2008}{2008}$$

bei Division durch 2008?

2. Es sei a eine positive reelle Zahl und $n > 4$ eine natürliche Zahl.

Man bestimme alle n -Tupel (x_1, x_2, \dots, x_n) positiver reeller Zahlen, die das folgendes Gleichungssystem erfüllen.

$$\begin{aligned} x_1 x_2 (3a - 2x_3) &= a^3 \\ x_2 x_3 (3a - 2x_4) &= a^3 \\ &\vdots \\ x_{n-2} x_{n-1} (3a - 2x_n) &= a^3 \\ x_{n-1} x_n (3a - 2x_1) &= a^3 \\ x_n x_1 (3a - 2x_2) &= a^3 \end{aligned}$$

3. Es sei $p > 1$ eine natürliche Zahl.

Wir betrachten die Menge \mathbf{F}_p jener nicht konstanten Folgen nicht negativer ganzer Zahlen, die die Rekursion $a_{n+1} = (p+1)a_n - pa_{n-1}$ (für alle $n > 0$) erfüllen.

Man zeige: Es existiert in \mathbf{F}_p eine Folge $\langle a_n \rangle$ mit der Eigenschaft, dass für jede andere Folge $\langle b_n \rangle$ in \mathbf{F}_p für alle n gilt, dass $a_n \leq b_n$.

4. Im Dreieck ABC ist E der Mittelpunkt der Seite AC und F der Mittelpunkt der Seite BC . Weiters ist G der Fußpunkt der Höhe durch C auf der Seite AB (oder ihrer Verlängerung).

Man zeige: Das Dreieck EFG ist genau dann gleichschenkelig, wenn das Dreieck ABC gleichschenkelig ist.



39. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 1, 5. Juni 2008

1. Man zeige: Für positive reelle Zahlen a, b, c mit $a + b + c = 1$ gilt

$$\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}} \leq \frac{1}{3}.$$

2. (a) Gibt es ein Polynom $P(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für jede positive ganze Zahl d mit d teilt 2008 gilt, dass $P(d) = \frac{2008}{d}$ ist?
- (b) Für welche positiven ganzen Zahlen n gibt es Polynome $P(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für jede positive ganze Zahl d mit d teilt n gilt, dass $P(d) = \frac{n}{d}$ ist?
3. Die Gerade g ist gegeben und auf ihr die vier Punkte P, Q, R, S (in dieser Reihenfolge von links nach rechts).

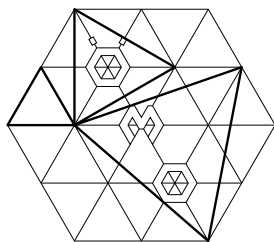
Man konstruiere alle Quadrate $ABCD$ mit folgenden Eigenschaften:

P liegt auf der Trägergerade von AD .

Q liegt auf der Trägergerade von BC .

R liegt auf der Trägergerade von AB .

S liegt auf der Trägergerade von CD .



39. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 2, 6. Juni 2008

4. Man bestimme alle Funktionen f vom Bereich der positiven ganzen Zahlen in den Bereich der nicht negativen ganzen Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $f(n \cdot m) = f(m) + f(n)$.

(b) $f(2008) = 0$.

(c) Für alle $n \equiv 39 \pmod{2008}$ gilt $f(n) = 0$.

5. Welche positiven ganzen Zahlen fehlen in der Folge $\langle a_n \rangle$?

$$\langle a_n = n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor \rangle_{n \geq 1}.$$

6. Es sei das Quadrat $ABCD$ gegeben. P sei von den Quadrateckpunkten und dem Quadratmittelpunkt M verschieden.

Für einen Punkt P , für den die Gerade PD die Gerade AC schneidet, sei dieser Schnittpunkt E .

Für einen Punkt P , für den die Gerade PC die Gerade BD schneidet, sei dieser Schnittpunkt F .

All diese Punkte P , für die E und F existieren, heißen zulässige Punkte.

Man bestimme die Menge der zulässigen Punkte, für die die Gerade EF parallel zur Geraden AD ist.