38. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 1, 18. Mai 2007

1. In einer quadratischen Tabelle mit 2007 Zeilen und 2007 Spalten ist in jedem Feld eine ungerade ganze Zahl eingetragen.

   Für $1 \leq i \leq 2007$ sei Z_i die Summe der Zahlen in der i-ten Zeile, und für $1 \leq j \leq 2007$ sei S_j die Summe der Zahlen in der j-ten Spalte.

   Weiters sei A das Produkt aller Z_i und B das Produkt aller S_j.

   Man zeige: $A + B$ ist von Null verschieden.

2. Für jede positive ganze Zahl n bestimme man einen möglichst großen Wert $C(n)$, sodass für alle n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ paarweise verschiedener ganzer Zahlen

   $$(n+1)\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - (\sum_{j=1}^{n} a_j)^2 \geq C(n)$$

   gilt.

3. Sei $M(n) = \{-1, -2, \ldots, -n\}$. Für jede nicht leere Teilmenge bilden wir das Produkt ihrer Elemente. Wie groß ist die Summe über alle diese Produkte?

4. Sei $n > 4$ eine natürliche Zahl.

   Gegeben ist das einem Kreis eingeschriebene konvexe n-Eck $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ ($A_n = A_0$) mit den Seitenlängen $\overline{A_{i-1}A_i} = i$ $(1 \leq i \leq n)$.

   Weiters sei φ_i der Winkel zwischen der Geraden A_iA_{i+1} und der Kreistangente im Punkt A_i. (Bemerkung: Der Winkel zwischen zwei Geraden ist stets kleiner oder gleich 90°.)

   Man bestimme die Summe

   $$\Phi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i$$

   dieser n Winkel.

38. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 1, 5. Juni 2007

1. Für welche nicht negativen ganzen Zahlen $a < 2007$ hat die Kongruenz $x^2 + a \equiv 0 \pmod{2007}$ genau zwei verschiedene Lösungen kleiner als 2007 im Bereich der nicht negativen ganzen Zahlen?

   (D.h. es gibt genau zwei nicht negative ganze Zahlen u und v kleiner als 2007, sodass $u^2 + a$ und $v^2 + a$ durch 2007 teilbar sind.)

2. Man bestimme alle Sextupel $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ nicht negativer ganzer Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen.

$$\begin{aligned}
x_1x_2(1-x_3) &= x_4x_5\\
x_2x_3(1-x_4) &= x_5x_6\\
x_3x_4(1-x_5) &= x_6x_1\\
x_4x_5(1-x_6) &= x_1x_2\\
x_5x_6(1-x_1) &= x_2x_3\\
x_6x_1(1-x_2) &= x_3x_4
\end{aligned}$$

3. Man bestimme alle Rhomben (Rauten) $ABCD$ mit der Seitenlänge $2a$ durch Angabe des Winkels $\alpha = \measuredangle BAD$, für die gilt:

   Es gibt einen Kreis, den jede Rautenseite in einer Sehne der Länge a schneidet.

38. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 2, 6. Juni 2007

4. Sei M die Menge der Polynome $P(x)$ mit lauter paarweise verschiedenen ganzzahligen Nullstellen und allen Koeffizientenbeträgen kleiner als 2007.

   Was ist der größte Grad, der unter den Polynomen aus M vorkommt?

5. Gegeben sei ein konvexes n-Eck mit einer Triangulation, das heißt einer Zerlegung in lauter Dreiecke durch einander nicht schneidende Diagonalen.

   Man zeige: Man kann mit den Ziffern der Zahl 2007 die n Eckpunkte so markieren, dass jedes Viereck aus 2 (längs einer Kante) benachbarten Dreiecken 9 als Summe der Zahlen auf seinen 4 Eckpunkten hat.

6. Gegeben ist das Dreieck ABC mit dem Umkreis $k(U, r)$. Auf der Verlängerung des Radius UA wird ein Punkt P gewählt. Die Gerade PB wird an der Geraden BA gespiegelt. Das Bild heiße g.

   Ebenso wird die Gerade PC an der Geraden CA gespiegelt. Das Bild heiße h.

   Der Schnittpunkt von g und h heiße Q.

   Man bestimme den geometrischen Ort aller Schnittpunkte Q, wenn P die Verlängerung des Radius UA (also die Punkte der Halbgeraden UA außerhalb des Kreises k) durchläuft.