



# 38. Österreichische Mathematik Olympiade

## Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 1, 18. Mai 2007

1. In einer quadratischen Tabelle mit 2007 Zeilen und 2007 Spalten ist in jedem Feld eine ungerade ganze Zahl eingetragen.

Für  $1 \leq i \leq 2007$  sei  $Z_i$  die Summe der Zahlen in der  $i$ -ten Zeile, und für  $1 \leq j \leq 2007$  sei  $S_j$  die Summe der Zahlen in der  $j$ -ten Spalte.

Weiters sei  $A$  das Produkt aller  $Z_i$  und  $B$  das Produkt aller  $S_j$ .

Man zeige:  $A + B$  ist von Null verschieden.

2. Für jede positive ganze Zahl  $n$  bestimme man einen möglichst großen Wert  $C(n)$ , sodass für alle  $n$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  paarweise verschiedener ganzer Zahlen

$$(n+1) \sum_{j=1}^n a_j^2 - \left( \sum_{j=1}^n a_j \right)^2 \geq C(n)$$

gilt.

3. Sei  $M(n) = \{-1, -2, \dots, -n\}$ . Für jede nicht leere Teilmenge bilden wir das Produkt ihrer Elemente. Wie groß ist die Summe über alle diese Produkte?

4. Sei  $n > 4$  eine natürliche Zahl.

Gegeben ist das einem Kreis eingeschriebene konvexe  $n$ -Eck  $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$  ( $A_n = A_0$ ) mit den Seitenlängen  $\overline{A_{i-1}A_i} = i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Weiters sei  $\varphi_i$  der Winkel zwischen der Geraden  $A_iA_{i+1}$  und der Kreistangente im Punkt  $A_i$ . (Bemerkung: Der Winkel zwischen zwei Geraden ist stets kleiner oder gleich  $90^\circ$ .)

Man bestimme die Summe

$$\Phi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i$$

dieser  $n$  Winkel.



## 38. Österreichische Mathematik Olympiade

### Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 1, 5. Juni 2007

1. Für welche nicht negativen ganzen Zahlen  $a < 2007$  hat die Kongruenz  $x^2 + a \equiv 0 \pmod{2007}$  genau zwei verschiedene Lösungen kleiner als 2007 im Bereich der nicht negativen ganzen Zahlen?

(D.h. es gibt genau zwei nicht negative ganze Zahlen  $u$  und  $v$  kleiner als 2007, sodass  $u^2 + a$  und  $v^2 + a$  durch 2007 teilbar sind.)

2. Man bestimme alle Sextupel  $(x_1, x_2, \dots, x_6)$  nicht negativer ganzer Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen.

$$x_1x_2(1 - x_3) = x_4x_5$$

$$x_2x_3(1 - x_4) = x_5x_6$$

$$x_3x_4(1 - x_5) = x_6x_1$$

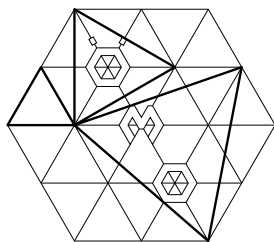
$$x_4x_5(1 - x_6) = x_1x_2$$

$$x_5x_6(1 - x_1) = x_2x_3$$

$$x_6x_1(1 - x_2) = x_3x_4$$

3. Man bestimme alle Rhomben (Rauten)  $ABCD$  mit der Seitenlänge  $2a$  durch Angabe des Winkels  $\alpha = \angle BAD$ , für die gilt:

Es gibt einen Kreis, den jede Rautenseite in einer Sehne der Länge  $a$  schneidet.



## 38. Österreichische Mathematik Olympiade

### Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 2, 6. Juni 2007

4. Sei  $M$  die Menge der Polynome  $P(x)$  mit lauter paarweise verschiedenen ganzzahligen Nullstellen und allen Koeffizientenbeträgen kleiner als 2007.

Was ist der größte Grad, der unter den Polynomen aus  $M$  vorkommt?

5. Gegeben sei ein konvexes  $n$ -Eck mit einer Triangulation, das heißt einer Zerlegung in lauter Dreiecke durch einander nicht schneidende Diagonalen.

Man zeige: Man kann mit den Ziffern der Zahl 2007 die  $n$  Eckpunkte so markieren, dass jedes Viereck aus 2 (längs einer Kante) benachbarten Dreiecken 9 als Summe der Zahlen auf seinen 4 Eckpunkten hat.

6. Gegeben ist das Dreieck  $ABC$  mit dem Umkreis  $k(U, r)$ . Auf der Verlängerung des Radius  $UA$  wird ein Punkt  $P$  gewählt. Die Gerade  $PB$  wird an der Geraden  $BA$  gespiegelt. Das Bild heiße  $g$ .

Ebenso wird die Gerade  $PC$  an der Geraden  $CA$  gespiegelt. Das Bild heiße  $h$ .

Der Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  heiße  $Q$ .

Man bestimme den geometrischen Ort aller Schnittpunkte  $Q$ , wenn  $P$  die Verlängerung des Radius  $UA$  (also die Punkte der Halbgeraden  $UA$  außerhalb des Kreises  $k$ ) durchläuft.