37. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 1, 21. Mai 2006

1. Es sei n eine positive ganze Zahl, die in Dezimalschreibweise auf genau k Nullen endet, aber größer als 10^k ist.

   Sei für ein n nur $k = k(n) \geq 2$ bekannt. Auf mindestens wie viele verschiedene Arten (als Funktion von $k = k(n)$) kann n als Differenz zweier Quadrate nicht negativer ganzer Zahlen dargestellt werden?

2. Man zeige: die Folge $\left\langle \frac{(n+1)^n n^{2-n}}{7n^2+1} \right\rangle_{n=0,1,2,\ldots}$ ist streng monoton wachsend.

3. Im Dreieck ABC seien D und E die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten BC und AC.

   Man zeige: gilt für die Längen $\overline{AD} = \overline{BE}$, so ist das Dreieck gleichschenkelig.

4. Gegeben sei die für alle positiven reellen Zahlen definierte Funktion

   $$f(x) = \lfloor x^2 \rfloor + \{x\}.$$

   (Dabei ist für jede reelle Zahl u $k = \lfloor u \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich u und $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$.)

   Man zeige: Es gibt eine arithmetische Folge verschiedener positiver rationaler Zahlen, die alle in gekürztem Zustand den Nenner 3 haben und nicht im Wertebereich der Funktion f liegen.

© Dr. Gerd Baron. Alle Angaben ohne Gewähr.

37. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 1, 31. Mai 2006

1. Es sei N eine positive ganze Zahl.

   Man bestimme die Anzahl jener positiven ganzen Zahlen $n \leq N$, die ein ganzzahliges Vielfaches haben, das in Dezimalschreibweise genau die Ziffern 2 und 6 (nicht unbedingt in gleicher Anzahl) verwendet.

2. Man zeige: Für alle Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen gilt die Ungleichung

$$3(a+b+c) \geq 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

   Wann gilt Gleichheit?

3. Gegeben ist das Dreieck ABC.

   Auf der Verlängerung von AB über B hinaus konstruieren wir den Punkt R mit $\overline{BR} = \overline{BC}$ und auf der Verlängerung von AC über C hinaus konstruieren wir den Punkt S mit $\overline{CS} = \overline{CB}$. A' sei der Diagonalenschnittpunkt im Viereck $BRSC$.

   Analog werden auf der Verlängerung von BC über C hinaus der Punkt T mit $\overline{CT} = \overline{CA}$ und auf der Verlängerung von BA über A hinaus der Punkt U mit $\overline{AU} = \overline{AC}$ konstruiert. B' sei der Diagonalenschnittpunkt im Viereck $CTUA$.

   Ebenso werden auf der Verlängerung von CA über A hinaus der Punkt V mit $\overline{AV} = \overline{AB}$ und auf der Verlängerung von CB über B hinaus der Punkt W mit $\overline{BW} = \overline{BA}$ konstruiert. C' sei der Diagonalenschnittpunkt im Viereck $AVWB$.

   Man zeige: Der Flächeninhalt $F(AC'BA'CB')$ des Sechsecks ist gleich der Summe der Flächeninhalte $F(ABC)$ und $F(A'B'C')$ der beiden Diagonalendreiecke des Sechsecks.

© Dr. Gerd Baron. Alle Angaben ohne Gewähr.

37. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 2, 1. Juni 2006

4. Man bestimme alle rationalen Zahlen x, sodass $1 + 105 \cdot 2^x$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

5. Man finde alle schwach monotonen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(-f(x)) = f(f(x)) = f(x)^2.$$

   ($f(x)$ heißt schwach monoton, wenn entweder $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ oder $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ gilt.)

6. Für ganze Zahlen $A \neq 0$ löse man über $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} x + y^2 + z^3 &= A \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^3} &= \frac{1}{A} \\ x \cdot y^2 \cdot z^3 &= A^2 \end{aligned}$$

© Dr. Gerd Baron. Alle Angaben ohne Gewähr.