# 36. Österreichische Mathematik Olympiade

## Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 1, 30. Mai 2005

1. Man zeige: Es gibt unendlich viele Vielfache von 2005, die ohne führende Nullen alle 10 Ziffern $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ gleich oft enthalten.

2. Für wieviele ganzzahlige Werte $a$ mit $|a| \leq 2005$ hat das Gleichungssystem

$$x^2 = y + a$$
$$y^2 = x + a$$

   ganzzahlige Lösungen?

3. Für drei reelle Zahlen $a, b, c$ sei $s_n = a^n + b^n + c^n$, die Summe ihrer $n$-ten Potenzen.
   Es sei bekannt, daß $s_1 = 2$, $s_2 = 6$ und $s_3 = 14$.
   Man zeige: Für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ gilt $|{s_n}^2 - s_{n-1}s_{n+1}| = 8$.

4. Gegeben sind zwei kongruente gleichseitige Dreiecke $ABC$ und $PQR$ mit parallelen Seiten. Das eine mit der Spitze nach „oben“, das andere mit der Spitze nach „unten“. Der Durchschnitt dieser Dreiecksflächen sei ein Sechseck.
   Man zeige: Die drei Verbindungslinien (Diagonalen) gegenüberliegender Eckpunkte des Sechsecks haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

# 36. Österreichische Mathematik Olympiade

## Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

<u>Teil 2</u>, Tag 1, 8. Juni 2005

1. Man bestimme alle Tripel $(a, b, c)$ positiver ganzer Zahlen, sodaß $a + b + c$ das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen ist.

2. Es seien $a, b, c, d$ positive reelle Zahlen.
   Man beweise die Ungleichung:
   $$\frac{a+b+c+d}{abcd} \le \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$$

3. Im spitzwinkeligen Dreieck $ABC$ wird über der Seite $AC$ als Durchmesser der Kreis $k_1$ und über der Seite $BC$ als Durchmesser der Kreis $k_2$ gezeichnet. Sei $E$ der Fußpunkt der Höhe $h_b$ auf $AC$ und $F$ der Fußpunkt der Höhe $h_a$ auf $BC$.
   Seien $L$ und $N$ die Schnittpunkte der Geraden $BE$ mit dem Kreis $k_1$ ($L$ auf der Strecke $BE$) und $K$ und $M$ die Schnittpunkte der Geraden $AF$ mit dem Kreis $k_2$ ($K$ auf der Strecke $AF$).
   Man zeige: $KLMN$ ist ein Sehnenviereck.

# 36. Österreichische Mathematik Olympiade

## Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 2, 9. Juni 2005

4. Die Funktion $f$ hat auf dem Bereich der ganzen Zahlen $\{0, 1, 2, \ldots, 2005\}$ nicht negative ganze Zahlen als Funktionswerte und erfüllt für alle nicht negativen ganzen Zahlen $x$ mit den Argumenten im Definitionsbereich die folgenden drei Bedingungen:

$$\begin{aligned} f(2x+1) &= f(2x) \\ f(3x+1) &= f(3x) \\ f(5x+1) &= f(5x) \end{aligned}$$

   Wie viele verschiedene Funktionswerte können auftreten?

5. Man bestimme alle Sextupel $(a, b, c, d, e, f)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen.

$$\begin{aligned} 4a &= (b+c+d+e)^4 \\ 4b &= (c+d+e+f)^4 \\ 4c &= (d+e+f+a)^4 \\ 4d &= (e+f+a+b)^4 \\ 4e &= (f+a+b+c)^4 \\ 4f &= (a+b+c+d)^4 \end{aligned}$$

6. Sei $Q$ ein Punkt im Inneren eines Würfels.
   Man zeige: Es gibt unendlich viele Geraden $g$ durch $Q$, sodaß $Q$ Mittelpunkt der Schnittstrecke $PR$ von $g$ mit dem Würfel ist.