



36. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 1, 30. Mai 2005

1. Man zeige: Es gibt unendlich viele Vielfache von 2005, die ohne führende Nullen alle 10 Ziffern $0, 1, 2, 3, \dots, 9$ gleich oft enthalten.
2. Für wieviele ganzzahlige Werte a mit $|a| \leq 2005$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x^2 &= y + a \\y^2 &= x + a\end{aligned}$$

ganzzahlige Lösungen?

3. Für drei reelle Zahlen a, b, c sei $s_n = a^n + b^n + c^n$, die Summe ihrer n -ten Potenzen. Es sei bekannt, daß $s_1 = 2$, $s_2 = 6$ und $s_3 = 14$.
Man zeige: Für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ gilt $|s_n^2 - s_{n-1}s_{n+1}| = 8$.
4. Gegeben sind zwei kongruente gleichseitige Dreiecke ABC und PQR mit parallelen Seiten. Das eine mit der Spitze nach „oben“, das andere mit der Spitze nach „unten“. Der Durchschnitt dieser Dreiecksflächen sei ein Sechseck.
Man zeige: Die drei Verbindungslinien (Diagonalen) gegenüberliegender Eckpunkte des Sechsecks haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.



36. Österreichische Mathematik Olympiade

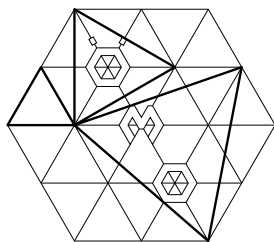
Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 1, 8. Juni 2005

1. Man bestimme alle Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen, sodaß $a + b + c$ das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen ist.
2. Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen.
Man beweise die Ungleichung:

$$\frac{a + b + c + d}{abcd} \leq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$$

3. Im spitzwinkligen Dreieck ABC wird über der Seite AC als Durchmesser der Kreis k_1 und über der Seite BC als Durchmesser der Kreis k_2 gezeichnet. Sei E der Fußpunkt der Höhe h_b auf AC und F der Fußpunkt der Höhe h_a auf BC .
Seien L und N die Schnittpunkte der Geraden BE mit dem Kreis k_1 (L auf der Strecke BE) und K und M die Schnittpunkte der Geraden AF mit dem Kreis k_2 (K auf der Strecke AF).
Man zeige: $KLMN$ ist ein Sehnenviereck.



36. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 2, 9. Juni 2005

4. Die Funktion f hat auf dem Bereich der ganzen Zahlen $\{0, 1, 2, \dots, 2005\}$ nicht negative ganze Zahlen als Funktionswerte und erfüllt für alle nicht negativen ganzen Zahlen x mit den Argumenten im Definitionsbereich die folgenden drei Bedingungen:

$$f(2x + 1) = f(2x)$$

$$f(3x + 1) = f(3x)$$

$$f(5x + 1) = f(5x)$$

Wie viele verschiedene Funktionswerte können auftreten?

5. Man bestimme alle Sextupel (a, b, c, d, e, f) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen.

$$4a = (b + c + d + e)^4$$

$$4b = (c + d + e + f)^4$$

$$4c = (d + e + f + a)^4$$

$$4d = (e + f + a + b)^4$$

$$4e = (f + a + b + c)^4$$

$$4f = (a + b + c + d)^4$$

6. Sei Q ein Punkt im Inneren eines Würfels.

Man zeige: Es gibt unendlich viele Geraden g durch Q , sodaß Q Mittelpunkt der Schnittstrecke PR von g mit dem Würfel ist.