35. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 1, 16. Mai 2004

1. Man bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d) reeller Zahlen, für die gilt: Die Summe aus dem Produkt dreier Zahlen und der restlichen Zahl gibt für jede Auswahl stets den gleichen Wert.

2. Gegeben sei ein einem Kreis eingeschriebenes Sechseck für dessen Seiten gilt:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = a, \overline{CD} = \overline{DE} = b, \overline{EF} = \overline{FA} = c.$$

   Man zeige: Es gibt 3 (paarweise disjunkte) Paare von orthogonalen Diagonalen.

3. Für natürliche Zahlen a und b sei $Z(a, b) = \frac{(3a)!(4b)!}{a!^4 b!^3}$.

   (a) Man zeige: Für $a \leq b$ ist $Z(a, b)$ eine natürliche Zahl.

   (b) Man zeige: Für jede natürliche Zahl b gibt es unendlich viele natürliche Zahlen a, sodass $Z(a, b)$ keine natürliche Zahl ist.

4. Die $2N = 2004$ reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{2003}, x_{2004}$ sind entweder $\sqrt{2} - 1$ oder $\sqrt{2} + 1$.
   Kann die Summe $\sum_{k=1}^{N} x_{2k-1} x_{2k}$ den Wert 2004 annehmen?
   Wie viele verschiedene ganzzahlige Werte kann sie annehmen? (Bei passender Vorgabe der x_j.)

---

35. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 1, 26. April 2004

1. Man beweise ohne Verwendung der Differentialrechnung:

   (a) Sind a, b, c, d reelle Zahlen, so gilt $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 - 6abcd \geq -2$.
   Wann gilt Gleichheit?

   (b) Für welche positiven ganzen Zahlen k gibt es eine Ungleichung der Form $a^k + b^k + c^k + d^k - kabcd \geq M_k$? Man bestimme eine möglichst große ganze Zahl M_k und ermittle, wann Gleichheit gilt.

2. (a) Man zeige: Für jede Menge $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ von Primzahlen gilt: Die Summe aller Stammbrüche (d.h. Brüche der Form $\frac{1}{n}$), deren Nenner genau die k gegebenen Primfaktoren (allerdings in beliebigen Potenzen mit Exponent ungleich Null) enthalten, ist wieder ein Stammbruch.

   (b) Wie groß ist diese Summe, wenn $\frac{1}{2004}$ unter diesen Summanden vorkommt?

   (c) Man zeige: Für jede k-elementige Menge $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ von Primzahlen $(k > 2)$ ist die gesuchte Summe kleiner als $\frac{1}{N}$ mit $N = 2 \cdot 3^{k-2}(k-2)!$.

3. In einem Trapez $ABCD$ mit dem Umkreis k stehen die Diagonalen AC und BD aufeinander senkrecht. Über den parallelen Seiten AB und CD als Durchmesser werden die Kreise k_a und k_c gezeichnet.

   Man berechne Umfang und Flächeninhalt jenes Bereiches, der innerhalb des Umkreises k, aber außerhalb der Kreise k_a und k_c liegt.

Quelle der Beispiele: Angabezettel eines Teilnehmers. Alle Angaben ohne Gewähr.

35. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 2, 27. Mai 2004

4. Man zeige: Es gibt eine unendliche Folge $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ positiver ganzer Zahlen, sodass für alle N die Summe $\sum_{k=1}^{N} {a_k}^2$ eine Quadratzahl ist.

   Man gebe eine Rekursionsformel für eine solche Folge an.

5. Man löse über den reellen Zahlen das folgende Gleichungssystem:

$$a^2 = \frac{\sqrt{bc}\sqrt[3]{bcd}}{(b+c)(b+c+d)}$$
$$b^2 = \frac{\sqrt{cd}\sqrt[3]{cda}}{(c+d)(c+d+a)}$$
$$c^2 = \frac{\sqrt{da}\sqrt[3]{dab}}{(d+a)(d+a+b)}$$
$$d^2 = \frac{\sqrt{ab}\sqrt[3]{abc}}{(a+b)(a+b+c)}$$

6. Über den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks mit dem Flächeninhalt 1 werden nach außen Dreiecke mit dem der jeweiligen Seite gegenüber liegenden Winkel 60° gezeichnet. Die neuen Eckpunkte seien P, Q und R.

   (a) Welchen Flächeninhalt kann das Dreieck PQR maximal haben?

   (b) Welchen Flächeninhalt kann das Dreieck der Innkreismittelpunkte der auf den Seiten aufgesetzten Dreiecke maximal haben?