



## 34. Österreichische Mathematik Olympiade

### Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 1, 28. Mai 2003

1. Man bestimme alle Tripel  $(p, q, r)$  aus Primzahlen, sodass  $p^q + p^r$  eine Quadratzahl ist.
2. Man bestimme den kleinsten und den größten Wert von  $f(x, y) = y - 2x$  für alle nicht negativen reellen Zahlen  $x, y$  mit  $x \neq y$  und  $\frac{x^2 + y^2}{x + y} \leq 4$ .
3. Es sei  $t$  eine positive reelle Zahl. Man bestimme die Anzahl der Lösungen des folgenden Gleichungssystems in positiven reellen Zahlen  $a, b, c, d$ .

$$a(1 - b^2) = t$$

$$b(1 - c^2) = t$$

$$c(1 - d^2) = t$$

$$d(1 - a^2) = t$$

4. Im Parallelogramm  $ABCD$  sei  $E$  der Mittelpunkt der Seite  $AB$  und  $F$  der Mittelpunkt von  $BC$ .  $P$  sei der Schnittpunkt der Strecken  $EC$  und  $FD$ .

Man zeige: Die Strecken  $AP, BP, CP$  und  $DP$  zerlegen das Parallelogramm in vier Dreiecke deren Flächeninhalte sich wie  $1 : 2 : 3 : 4$  verhalten.



## 34. Österreichische Mathematik Olympiade

### Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 1, 28. Juni 2003

1. Gegeben ist das Polynom  $P(n) = n^3 - n^2 - 5n + 2$ .

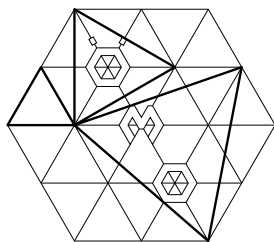
Man bestimme alle ganzen Zahlen  $n$ , sodass  $P(n)^2$  das Quadrat einer Primzahl ist.

2. Es seien  $a, b, c$  reelle Zahlen ungleich Null derart, dass  $\alpha, \beta, \gamma \in \{-1, 1\}$  mit  $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$  existieren.

Welcher ist der kleinste Wert, den  $\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\right)^2$  annehmen kann?

3. Um jeden Gitterpunkt  $(x, y)$  mit nicht negative ganzen Zahlen als Koordinaten wird ein Quadrat mit dem Gitterpunkt als Mittelpunkt und der Seitenlänge  $\frac{0,9}{2^x 5^y}$  in beliebiger Lage gelegt.

Man bestimme den Flächeninhalt dieser aus unendlich vielen Quadraten bestehenden Figur.



## 34. Österreichische Mathematik Olympiade

### Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 2, 29. Juni 2003

4. Man zeige: Für jede Basis  $g > 2$  gibt es genau eine dreistellige Zahl  $(abc)_g$ , die in einer Basis  $h$ , die sich von  $g$  um 1 unterscheidet, als  $(cba)_h$  mit den Ziffern in umgekehrter Reihenfolge dargestellt wird.

5. Zur Verfügung stehen genügend viele Steine: Rechtecke der Größe  $2 \times 1$  und Quadrate der Größe  $1 \times 1$ .

Sei  $n > 3$  eine natürliche Zahl.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit diesen Steinen ein  $3 \times n$  Rechteck auszulegen, wobei die verwendeten  $2 \times 1$  Rechtecke mit der längeren Seite parallel zur Seite mit der Länge 3 liegen müssen und einander nicht berühren dürfen?

6. Es sei  $ABC$  ein spitzwinkeliges Dreieck. Der Kreis  $k$  mit dem Durchmesser  $AB$  schneidet die Strecken  $AC$  und  $BC$  in den Punkten  $P$  und  $Q$ . Sei  $R$  der Schnittpunkt der Kreistangenten in  $A$  und  $Q$  und  $S$  derjenige der Tangenten in  $B$  und  $P$ .

Man zeige:  $C$  liegt auf der Strecke  $RS$ .