33. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 1, 28. Mai 2002

1. Man bestimme alle ganzen Zahlen a und b, sodass $(19a+b)^{18}+(a+b)^{18}+(19b+a)^{18}$ eine Quadratzahl ist.

2. Man bestimme eine möglichst große reelle Zahl C, sodass für alle reellen Zahlen x und y $(x \neq y)$ mit $xy = 2$ die Ungleichung

$$\frac{((x+y)^2-6)((x-y)^2+8)}{(x-y)^2} \geq C$$

   gilt.

   Für welche Wertepaare (x, y) gilt dann Gleichheit?

3. Es sei $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$. Man berechne die Summe der $f\left(\frac{k}{2002}\right)$, wobei über jene k zwischen 0 und 2002 summiert wird, für die der Bruch $\frac{k}{2002}$ gekürzt ist.

4. Drei paarweise verschiedene Punkte A, C und P sind in der Ebene gegeben. A und C sind gegenüberliegende Ecken eines Parallelogramms $ABCD$ und der Punkte P liegt auf der Winkelsymmetralen des Winkels DAB und der Winkel APD ist ein rechter Winkel. Man konstruiere alle möglichen Parallelogramme $ABCD$, die diese Bedingungen erfüllen.

33. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 1, 5. Juni 2002

1. In einem gewöhnlichen 8×8 Schachbrett gibt es viele Rechtecke und Quadrate, die nur aus ganzen Schachfeldern zusammengesetzt sind. Vom 1×1 Quadrat bis zum 8×8 Quadrat.

   Wie groß ist die Summe ihrer Flächeninhalte?

   Welche Formel ergibt sich für ein „$a \times b$ Schachbrett“ für die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke und Quadrate vom 1×1 Quadrat bis zum $a \times b$ Rechteck?

2. Es sei $b > 800$ eine natürliche Zahl. Man bestimme alle $(a_1, a_2, \ldots, a_{2002})$ mit natürlichen Zahlen a_j $(1 \leq j \leq 2002)$, sodass
$$\sum_{j=1}^{2002} a_j^{a_j} = 2002 b^b.$$

3. $ABCD$ und $AEFG$ sind zwei ähnliche Sehnenvierecke (gegen den Uhrzeigersinn „beschriftet“). Es sei P der zweite Schnittpunkt der beiden Umkreise der Vierecke. Man zeige, dass P auf der Geraden BE liegt.

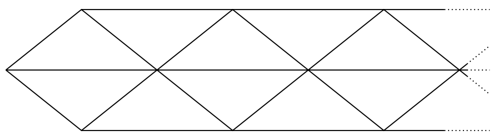
33. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 2, Tag 2, 6. Juni 2002

4. Man bestimme alle Polynome $P(x)$ möglichst kleinen Grades mit folgenden Eigenschaften:
   (a) Der Koeffizient der höchsten Potenz ist 200.
   (b) Der Koeffizient der niedrigsten auftretenden Potenz ist 2.
   (c) Die Summe aller Koeffizienten ist 4.
   (d) $P(-1) = 0$.
   (e) $P(2) = 6$.
   (f) $P(3) = 8$.

5. In einem Straßennetz, dessen Anfang gezeichnet ist, sind die Punkte in der mittleren Horizontalen der Reihe nach mit $1, 4, 7, \ldots$ bezeichnet. Die oberen Punkte der Reihe nach mit $2, 5, 8, \ldots$ und die unteren der Reihe nach mit $3, 6, 9, \ldots$.



Wie viele Wege von „1“ nach „$3n+1$“ gibt es, die Punkte nur in monoton wachsender Reihenfolge zu besuchen?

6. Gegeben ist ein spitzwinkeliges Dreieck ABC und sein Höhenschnittpunkt H. HA, HB und HC zerlegen das Dreieck ABC in drei kleine Dreiecke ABH, BCH und CAH.

   Man zeige: Die drei kleinen Dreiecke haben gleichen Umfang genau dann, wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist.