32. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Tag 1, 30. Mai 2001

1. Man zeige: $\frac{1}{25}\sum_{k=0}^{2001}\left[\frac{2^k}{25}\right]$ ist eine natürliche Zahl.

   (Dabei ist $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.)

2. Man bestimme alle Tripel positiver reller Zahlen x, y und z mit

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \quad \text{und} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= 2-\frac{4}{xyz} \end{aligned}$$

3. Gegeben ist das Dreieck $\triangle ABC$ mit dem Umkreis $k(U,\, r)$.

   An den doppelt so großen Kreis $K(U,\, 2r)$ wird von den beiden Tangenten parallel zu $c = AB$ jene ausgewählt und mit c' bezeichnet, für die C zwischen c und c' liegt.

   Analog werden Tangenten a' und b' bestimmt. Das so entstehende Dreieck mit den Seitengeraden a', b', c' sei $\triangle A'B'C'$.

   Man zeige: Die Verbindungslinien entsprechender Paare von Seitenmittelpunkten der beiden Dreiecke haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

32. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Tag 2, 31. Mai 2001

4. Man bestimme alle reellwertigen Funktionen $f(x)$ einer reellen Veränderlichen, sodass für alle reellen Zahlen x und y die Beziehung $f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$ gilt.

5. Man bestimme alle ganzen Zahlen m, sodass alle Lösungen der Gleichung $3x^3 - 3x^2 + m = 0$ rational sind.

6. Gegeben ist ein Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$. Auf dem Kreisbogen sind zwei Punkte C und D mit $\overline{AC} = \overline{CD}$ markiert. Die Tangente in C schneidet die Gerade BD im Punkt E. Die Gerade AE schneidet den Kreisbogen im Punkt F.

   Man zeige, dass $\overline{CF} < \overline{FD}$ gilt.