31. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Tag 1, 7. Juni 2000

1. Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_0 = 4$ und $a_1 = 1$ erfüllt für $n \geq 1$ die Rekursion $a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1}$ und definiert die Folge
$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$
Man bestimme die Koeffizienten α und β so, dass b_n die Rekursion
$$b_{n+1} = \alpha b_n + \beta b_{n-1}$$
erfüllt.

   Man bestimme auch den expliziten Term für b_n.

2. Einem Kreis k ist das Trapez $ABCD$ (Reihenfolge $ABCD$ gegen den Uhrzeigersinn, $AB \parallel CD$) eingeschrieben. Auf dem Bogen $\widehat{AB}$ werden zwei Punkte P und Q ($P \neq Q$) ausgewählt (Reihenfolge $APQB$ entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn).

   Sei X der Schnittpunkt der Geraden CP und AQ und Y der Schnittpunkt der Geraden BP und DQ.

   Man zeige, dass P, Q, X und Y auf einem Kreis liegen.

3. Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung
$$\Big|\Big|\Big|\Big|\Big|\Big||x^2 - x - 1| - 3\Big| - 5\Big| - 7\Big| - 9\Big| - 11\Big| - 13\Big| = x^2 - 2x - 48.$$

31. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Tag 2, 8. Juni 2000

4. Im spitzwinkeligen, nicht gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit dem Winkel $\gamma = 60°$ seien U der Umkreismittelpunkt, H der Höhenschnittpunkt und D der Schnittpunkt der Geraden AH und BC (Höhenfußpunkt der Höhe durch A).

   Man zeige, dass die eulersche Gerade HU Winkelsymmetrale des Winkels $\angle BHD$ ist.

5. Man bestimme alle Paare ganzer Zahlen (m, n), sodass

$$\left|(m^2 + 2000m + 999999) - (3n^3 + 9n^2 + 27n)\right| = 1$$

6. Man bestimme alle Funktionen f von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen, für die für alle reellen Zahlen x, y, z die Beziehung $f(x + f(y + z)) + f(f(x + y) + z) = 2y$ gilt.